§ Parallel transport

$d\langle \mu,\nu\rangle = \langle D\mu,\nu\rangle + \langle \mu, D\nu\rangle$ for all $\mu,\nu \in \Gamma(E)$

Let $X \in T_xM$ 則上式為 $X\langle \mu,\nu\rangle = \langle D_X\mu,\nu\rangle + \langle \mu, D_X\nu\rangle$

Now let $c: I \to M$ be a smooth curve，and let $\mu(t),\nu(t)$ be parallel along c i.e.

$\underset{c}{D_{\cdot}}\mu = 0 = \underset{c}{D_{\cdot}}\nu$ Then $\frac{d}{dt}\langle \mu(t),\nu(t)\rangle = 0$

[N3302]

$\gamma(t)$ 是 M 上的一曲線，$X = \frac{d\gamma}{dt}$ 是 $\gamma(t)$ 的切向量。V 是 $\gamma(t)$ 上的一個向量場，V 沿著 γ 平行移動 $\Leftrightarrow \nabla_X V = 0$

平行移動方程：$\dot{V}^i + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j V^k = 0$

黎曼流形上 Levi-Civita connection 與度量相容，$\nabla g = 0$，平行移動(等距變換)會保持向量的長度及向量間的夾角。

V(t)、W(t)是沿 γ 的平行向量場，$\nabla_X V = 0, \nabla_X W = 0$

(1) 證明向量場 V 保持長度 即 $g(V(t),V(t))$=const

Connection 與 metric 相容 即 $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

取 Y=Z=V，又 $X = \frac{d\gamma}{dt}$

$\frac{d}{dt}g(V,V) = g(\nabla_X V, V) + g(V, \nabla_X V) = 0$ (因為 $\nabla_X V = 0$)

即 $g(V(t),V(t))$=const

(2) $\cos\theta(t) = \frac{g(V(t),W(t))}{|V(t)||W(t)|}$ 只須證明 $g(V(t),W(t))$ 為常數

$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

取 Y=V，Z=W 即可

$\frac{d}{dt}g(V),g(W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W) = 0$

推廣與抽象化：推廣到向量叢的情形

向量叢 $E \to M$ 可以看作是把某個向量空間「黏」在流形的每一點上，而截面就是將這些向量分配給每一點的場。

如果我們在 E 上指定一個叢度量 h，也就是在每一根纖維上給定一個內積（類似於黎曼度量），那麼我們就可以測量纖維中向量的長度與角度。
度量聯絡是指這個聯絡與叢度量相容：

$X \bullet h(s,t) = h(\nabla_X s,t) + h(s,\nabla_X t)$ 這式子保證了平行移動會保持內積。

Lemma 4.2.1 *The parallel transport induced by a metric connection on a vector bundle preserves the bundle metric in the sense that parallel transport constitutes an isometry of the corresponding fibers.* □

Let D be a metric connection (要求保長)on the vector bundle E with bundle metric。
Assume that w.r.t. a metric bundle chart we have the decomposition D=d+A
Then for any $\mathrm{X} \in \mathrm{TM}$ ，the matrix A(X) is skew symmetric(對應旋轉矩陣)，i.e.
$\mathrm{A(X)} \in o(n)$
在局部座標下，D 可以看作是平直空間的微分 d（普通導數）加上一個「修正矩陣」A。這個 A 決定了當我們從一點移動到另一點時，向量如何為了適應流形的彎曲而「轉向」。
這個命題的幾何意義是：
在一個有長度概念的空間裡，一個「自然」的移動方式（連通）不應該改變物體的長度或夾角。為了達成這一點，該移動方式在局部表現出的「偏離程度」必須是一個旋轉變換（反對稱矩陣）。

Vector bundle E 上的 metric connection 分解成 D=d+A，則 D 的曲率 F 滿足

$F \in \Omega^2(AdE)$ (AdE 是伴隨叢)

例 二維球面 S^2 上的切叢
流形 S^2
向量叢 E：TS^2 。也就是在球面的每一點 p 上，掛著一個切平面。
聯絡 D：選擇 Levi-Civita 聯絡，這是一種 metric connection，它會保持向量的長度，並且是無扭率的。
拆解 D=d+A
在一個點上，切平面可以由兩個基底向量張成：
取 $e_1 = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$ ：沿著經線方向（南北向）。
$e_2 = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ ：沿著緯線方向（東西向）。

在這組基底下的度量矩陣是單位矩陣 I，滿足命題中「度量聯絡（Metric Connection）」的條件 。

計算聯絡形式 A：

計算 De_1

在 θ 方向：$\nabla_{\partial_\theta} e_1 = 0$

在 ϕ 方向：$\nabla_{\partial_\phi} \dfrac{\partial}{\partial\theta} = \cot\theta \dfrac{\partial}{\partial\phi} = \cos\theta e_2$ (Christoffel symbols $\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta$)

$De_1 = 0 \cdot d\theta + (\cos\theta e_2)d\phi = (\cos\theta d\phi)e_2 = A_{21}$

因為 A 是反對稱 所以 $A_{12} = -\cos\theta d\phi$

寫成矩陣就是 $A = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta d\phi \\ \cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix}$

示範拆解 D=d+A

假設球面上有一個向量場(截面)s，它在基底表示下為 $s = s^1 e_1 + s^2 e_2$

聯絡 D 對它作用的結果如下：

$$D\begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta d\phi \\ \cos\theta d\phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix}$$

d 部分：代表分量自身的變化（如果在平直空間，這就是全部）。

A 部分：代表因為球面彎曲，基底 $\{e_1, e_2\}$ 本身在移動時發生的旋轉。

曲率 $F = D \wedge D = dA + A \wedge A$

1. **計算**：
   假設我們有 $A = \cos\theta\, d\phi$。
   - 首先，$dA = d(\cos\theta) \wedge d\phi = (-\sin\theta\, d\theta) \wedge d\phi = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$。
   - 其次，$A \wedge A$：因為 A 在這裡是數值（U(1) 聯絡），兩個相同的 1-形式 wedge 起來為 0（$d\phi \wedge d\phi = 0$）。如果是矩陣值的 A，這一項可能不為 0，但在阿貝爾群（U(1)）的情況，這一項為 0。
2. **結果**：
   所以，曲率 $F = dA = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$。
   這個 $-\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ 正是球面的**面積元**。它對應到高斯曲率 $K = 1$（單位球面）。

在切叢的例子裡，曲率其實是一個把切向量映射到切向量的算子（一個 2-形式值的線性變換）。在球面的例子中，它代表「沿著某個方向轉一圈，向量會旋轉多少」。