§ Metric Connection [GA4.2.1]

§ 4.2.1 metric connection ∇

Let E be a vector bundle on the differentiable manifold M with bundle metric $\langle .,. \rangle$。

A connection D on E is called metric if $d\langle \mu, v\rangle = \langle D\mu, v\rangle + \langle \mu, Dv\rangle$ for all $\mu, v \in \Gamma(E)$

Let $X \in T_x M$ it means that $X\langle \mu, v\rangle = \langle \mathrm{D_X}\mu, v\rangle + \langle \mu, D_X v\rangle$

Let $c: I \to M$ be a smooth curve，and let $\mu(t)$ and v(t) be parallel along c，i.e.
$D_T\mu = 0 = D_T v$，then $\frac{d}{dt}\langle \mu(t), v(t)\rangle = 0$

Lemma 4.2.1
The parallel transport induced by a metric connection on a vector bundle preserves the bundle metric in the sense that parallel transport constitutes an isometry of the corresponding fibers。
$\frac{d}{dt}\langle \mu(t), v(t)\rangle = 0$ means that the scalar product is preserved under parallel transport。
這裡 $\mu, v \in \Gamma(E)$，其實就是向量場。
在具有度量結構（Metric）的向量叢（Vector Bundle）上，一個度量聯絡（metric connection）所誘導的平行移動會保持纖維（Fiber）之間的等距性質（isometry)。

Lemma 4.2.2

Let D be a **metric connection** on the vector bundle E with bundle metric $\langle .,. \rangle$。

Assume that w.r.t. a metric bundle chart we have the decomposition D=d+A，then for any

$X \in TM$，the matrix A(X) is skew symmetric，i.e. $A(X) \in o(n)$ (即 $A^T = -A$)。

空間曲線的 Frenet 公式正是度量聯絡在 Orthonormal Fram 下表現為反對稱矩陣的一個最經典的例子。

Connection matric $A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$

曲率與撓率(κ,τ)：在 Frenet 公式中，反對稱矩陣的分量代表了曲線的幾何性質。在度量聯絡中，這些反對稱矩陣的分量則構成 Connection forms，進而決定了空間的曲率。
剛體運動：Frenet 標架的移動可以看作是一個剛體沿著曲線在旋轉。因為是剛體，所以它的瞬時旋轉矩陣必須是反對稱的。
Lemma 4.2.2 在討論一般化的向量叢幾何，而 Frenet 公式則是將這個理論應用在一維曲線的切叢（加上法叢）上的特例。

例

設底流形 $M=R^2$ ，向量叢 $E=M\times R^2$

定義內積 $\langle\mu,v\rangle := \mu^T G(p)v$ 其中 $G(p)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix}$

則對於截面 $\mu=(\mu^1,\mu^2)^T, v=(v^1,v^2)^T$ ，$\langle\mu,v\rangle=\mu^1v^1+e^{2x}\mu^2v^2$ ，我們要定義一個

connection D，使其與度量相容，即滿足 $d\langle\mu,v\rangle=\langle D\mu,v\rangle+\langle\mu,Dv\rangle$ for all

$\mu,v\in\Gamma(E)$

在局部座標下我們用 connection 1-form 來描述。

對任意切向量場 X，令 $D_X\mu=X_\mu+\omega(X)_\mu$ 其中 X_μ 是對係數求方向導數，而

$\omega(X)$ 是一個 2×2 矩陣，線性依賴於X。我們需要確定 ω 使得度量相容條件成立。

相容條件等價於 $XG=\omega(X)^T G+G_\omega(X)$ for all X

計算 G 的導數：$\partial_x G=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2e^{2x}\end{pmatrix}, \partial_y G=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

因此 對於 $X=\partial_x$ 我們需要 $\omega(\partial_x)^T G+G_\omega(\partial_x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2e^{2x}\end{pmatrix}$

設 $\omega(\partial_x)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 則

$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2e^{2x}\end{pmatrix}$$

得 a=0，d=1，$b+ce^{2x}=0$ 取 b=c=0 則 $\omega(\partial_x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

對於 $X=\partial_y$ 因為 $\partial_y G=0$ 可取 $\omega(\partial_y)=0$ 這樣我們就定義了一個 connection

$$D_{\partial_x}\begin{pmatrix}\mu^1\\ \mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_x\mu^1\\ \partial_x\mu^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^1\\ \mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_x\mu^1\\ \partial_x\mu^2+\mu^2\end{pmatrix}\text{，}D_{\partial_y}\begin{pmatrix}\mu^1\\ \mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_y\mu^1\\ \partial_y\mu^2\end{pmatrix}$$

驗證對任意截面 μ,v ，任意切向量 X， $d\langle\mu,v\rangle=\langle D_X\mu,v\rangle+\langle\mu,D_X v\rangle$

由於這是線性等式，我們可以選取幾個具體的截面來驗證，並確認對所有X 成立。

例

取 $\mu=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ，內積 $\langle\mu,v\rangle=x\cdot1+e^{2x}\cdot y\cdot0=x$ 所以 $d\langle\mu,v\rangle=dx$ 即

$\partial_x\langle\mu,v\rangle=1,\partial_y\langle\mu,v\rangle=0$

計算 $D_{\partial_x\mu}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$ ，$D_{\partial_x}v=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

於是 $\langle D_{\partial_x}\mu,v\rangle=(1,y)G\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=1\cdot1+e^{2x}\cdot y\cdot0=1$ ，$\langle\mu,D_{\partial_x}v\rangle=0$

驗證成立。

例 驗證 S^2 上的情形

E：tangent bundle TS^2 ，$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$ ，則 $\langle\partial_\theta,\partial_\theta\rangle=1,\langle\partial_\phi,\partial_\phi\rangle=\sin^2\theta$

設 $\mu=\partial_\phi,v=\partial_\phi$ 驗證 $d\langle\mu,v\rangle=\langle D\mu,v\rangle+\langle\mu,Dv\rangle$

則左式 $d\langle\mu,v\rangle=d\langle\partial_\phi,\partial_\phi\rangle=d(\sin^2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$

$D_{\partial\theta}\partial\phi=\Gamma^\theta_{\theta\phi}\partial_\theta+\Gamma^\phi_{\theta\phi}\partial_\phi=\cot\theta\partial_\phi$

右式 沿 ∂_θ 方向 $\langle D_{\partial_\theta}\partial_\phi,\partial_\phi\rangle+\langle\partial_\phi,D_{\partial_\theta}\partial_\phi\rangle=2\cot\theta\langle\partial_\phi,\partial_\phi\rangle=2\sin\theta\cos\theta$

這保證了：如果你沿著球面的測地線平行移動一個向量，它的長度會保持不變。

§ 自旋聯絡是 metric connection

$$\nabla_X\psi=X(\psi)+\frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)\gamma^i\gamma^j\psi$$

§ 把 bundle metric 搬到複數向量叢上， $E\to M$ 是一個 complex vector bundle

一個 Hermitian fiber metric $h_x:E_x\times E_x\to C$

For two spin fields $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \xi^i, \phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \xi^i, h(\psi, \phi) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi_i} \phi_i = \psi^{\dagger} \phi$

若定義 connection 1-form 矩陣為 $\omega = (\omega_j^i)$ 則相容條件改成 $dG = \omega^T G + G\omega$

設 $\omega = (\omega_j^i)$ 可解得 $\omega_1^1 = 0, e^{2x}\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \omega_2^2 = dx$

選取滿足上述條件的 ω 就是一個 metric connection，例如 $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dx \end{pmatrix}$

§ curvature F

Let D=d+A be a metric connection on E。Then the curvature F of D satisfies

$F \in \Omega^2(AdE)$

EX 證明 $F = D^2 = dA + A \wedge A$ (筆記 p.35)

Let $A = A_j dx^j$ then $F = (\frac{\partial A_j}{\partial x^i} + A_i A_j) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j]) dx^i \wedge dx^j$

$F : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$

$\mu \to R(\, . \, , \mu)$

從 $A = A_j dx^j$ ， $F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2}(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + [A_i, A_j]) dx^i \wedge dx^j$ 推到 R_{ijk}^l