

§ Connections in Vector Bundles [GA4.1]

§ 定義 4.1.2

E is a vector bundle over M , a covariant derivative (or equivalently, a connection) D is a map: $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes \Gamma(T^*M)$

Let $\mu \in \Gamma(E)$, $D_{v(t)}\mu(t) = 0$ 的解 $\mu(t)$ 有一個 initial value $\mu(0) \in E_{c(0)}$ 則 $\mu(t)$

稱為 $\mu(0)$ 沿曲線 c 的平行移動。

這裡 $\mu(t)$ 是一個 1-form (或者更一般地, 是一個張量場) 沿著曲線 $c(t)$ 的值。

或者寫成 $\frac{D\mu}{dt} = 0$, 其中 $\frac{D}{dt}$ 是沿著曲線 c 的協變導數。

Now let $c: I \rightarrow M$ be a smooth curve, and let $\mu(t), v(t)$ be parallel along c

i.e. $D_X \mu = 0 = D_X v, X = \dot{c}$ Then $\frac{d}{dt} \langle \mu(t), v(t) \rangle = 0$

若我們有一個平行移動的向量場 $X(t)$ 和一個平行移動的 1-form $\omega(t)$, 那麼它們

的收縮 (對偶配對) 在曲線各處均保持不變: $\frac{d}{dt} \langle \omega(t), X(t) \rangle = 0$

這意味著平行移動保留了 1-form 作為「線性測量工具」的功能。如果你想在曲線上的不同點比較力或動量 (通常建模為 1-form), 平行移動提供了唯一的基準。

例如 $M = \mathbb{R}^2, X = \frac{\partial}{\partial x}, \omega = y dx$ 則

$\omega(X) = y$, 左式 = dy

$\nabla \omega = dy \otimes dx$ ($\nabla \omega)(X) = dy, \nabla X = 0 \Rightarrow \omega(\nabla X) = 0$

[N3302] 向量場的平行移動

§ 定義 dual connection 在向量叢上的作用

E is the vector bundle of differential manifold M , D is a connection on E . D^* is the connection dual to D on the dual bundle E^* .

d is the exterior derivative then $d(\mu, v^*) = (D\mu, v^*) + (\mu, D^*v^*)$

其中對偶配對 $(v, \phi) = \phi(v)$, (μ, v^*) 是向量叢 E 的截面與其對偶叢 E^* 之間的天然運算。 (μ, v^*) 是流形 M 上的光滑函數, 所以左式是一個 1-form。

例 黎曼流形上的切叢與餘切叢

設 M 是黎曼流形， $E=TM$ ， $E^*=T^*E$

令 X 為一個向量場(即 E 的截面 μ)， ω 為一個 1-form(即 E^* 的截面 ν^*)

令 ∇ 為切叢上的黎曼聯絡(即 D)

向量場與 1-form 的配對就是 $\omega(X)$ ，是一個函數。

對於任意向量場 Y ，我們希望對偶聯絡 ∇^* 滿足 $Y(\omega(X)) = \omega(\nabla_Y X) + (\nabla_Y^* \omega)(X)$

移項後得到餘切聯絡的定義： $(\nabla_Y^* \omega)(X) = Y(\omega(X)) - \omega(\nabla_Y X)$

基底表示下 $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ ， $\nabla_{\partial_i} dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k$

這個定義的核心意義在於保持張量分析的自治性。

它確保了當我們在微分一個包含「上指標(向量)」和「下指標(對偶向量)」的物理量時，微分運算(聯絡)能像微積分中的乘積法則一樣展開，而不會遺漏任何變率。

§ $D=d+A$

$A\mu_j = A_j^k \mu_k$ where $A_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i$

在局部座標下， D 可以看作是平直空間的微分 d (普通導數) 加上一個修正項 (connection 1-form) A 。這個 A 決定了當我們從一點移動到另一點時，向量如何為了適應流形的彎曲而「轉向」。

對偶聯絡在對偶基底下 $D^* = d - A^T$

EX

由 $D=d+A$ 推導 Yang-Mills 場強 $F = dA + A \wedge A$

例 二維球面 S^2 上的切叢

流形 S^2 ，向量叢 $E: TS^2$ 。也就是在球面的每一點 p 上，掛著一個切平面。

聯絡 D ：選擇 Levi-Civita 聯絡，這是一種 metric connection，它會保持向量的長度，並且是無扭率的。

拆解 $D=d+A$

在一個點上，切平面可以由兩個基底向量張成：

取 $e_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}$ ：沿著經線方向(南北向)。

$e_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ ：沿著緯線方向(東西向)。

在這組基底的度量矩陣是單位矩陣 I ，滿足命題中「度量聯絡 (Metric Connection)」的條件。

計算聯絡形式 A :

計算 De_1

在 θ 方向: $\nabla_{\partial_\theta} e_1 = 0$

在 ϕ 方向: $\nabla_{\partial_\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \theta e_2$ (Christoffel symbols $\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\theta = \cot \theta$)

$$De_1 = 0 \cdot d\theta + (\cos \theta e_2) d\phi = (\cos \theta d\phi) e_2 = A_{21}$$

因為 A 是反對稱 所以 $A_{12} = -\cos \theta d\phi$

$$\text{寫成矩陣就是 } A = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix}$$

示範拆解 $D = d + A$

假設球面上有一個向量場(截面) s ，它在基底表示下為 $s = s^1 e_1 + s^2 e_2$

聯絡 D 對它作用的結果如下：

$$D \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \end{pmatrix}$$

d 部分：代表分量自身的變化（如果在平直空間，這就是全部）。

A 部分：代表因為球面彎曲，基底 $\{e_1, e_2\}$ 本身在移動時發生的旋轉。

$$\text{曲率 } F = D \wedge D = dA + A \wedge A$$

1. 計算：

假設我們有 $A = \cos \theta d\phi$ 。

- 首先， $dA = d(\cos \theta) \wedge d\phi = (-\sin \theta d\theta) \wedge d\phi = -\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ 。
- 其次， $A \wedge A$ ：因為 A 在這裡是數值（U(1) 聯絡），兩個相同的 1-形式 wedge 起來為 0（ $d\phi \wedge d\phi = 0$ ）。如果是矩陣值的 A ，這一項可能不為 0，但在阿貝爾群（U(1)）的情況，這一項為 0。

2. 結果：

所以，曲率 $F = dA = -\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ 。

這個 $-\sin \theta d\theta \wedge d\phi$ 正是球面的面積元。它對應到高斯曲率 $K = 1$ （單位球面）。

在切叢的例子裡，曲率其實是一個把切向量映射到切向量的算子（一個 2-形式值的線性變換）。在球面的例子中，它代表「沿著某個方向轉一圈，向量會旋轉多少」。

定理 4.1.1

$DF=0$ (second Bianchi identity)

定理 4.1.2

The curvature tensor R of a connection D satisfies

$$R(X, Y)\mu = D_X D_Y \mu - D_Y D_X \mu - D_{[X, Y]}\mu \quad \text{for all vector fields } X, Y \text{ on } M \text{ and all } \mu \in \Gamma(E)$$

4.1.6

Let ∇ be a connection on the tangent bundle TM of a differentiable manifold M . A

curve $c: I \rightarrow M$ is called a geodesic w.r.t ∇ if $\nabla_T T \equiv 0$ where $T = \dot{c}$.

4.1.7 定義 torsion tensor $T(X, Y) =$

∇ is called torsion free if $T \equiv 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

4.1.8 定義

Definition 4.1.8 A connection ∇ on TM is called *flat* if each point in M possesses a neighborhood U with local coordinates for which all the coordinate vector fields $\frac{\partial}{\partial y^i}$ are parallel, that is,

$$\nabla \frac{\partial}{\partial y^i} = 0. \quad (4.1.43)$$

定理 4.1.3

A connection ∇ on TM is flat if and only if its curvature and torsion vanish identically.