

§

$$F : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^2(E), \mu \rightarrow R(.,.)\mu$$

$$F = dA + A \wedge A, \quad F_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l$$

先用指數映射建立正規坐標系[N3501]

M 上任一點 P，選擇 normal coordinates ($\Gamma_{jk}^i(p) = 0 \Rightarrow [A, F] = 0$ 因為在 P，

A=0)

第二 Bianchi 恆等式 $DF = dF + [A, F] = 0$ 變成 $dF = 0$

$d(\frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\nabla_m R_{jkl}^i dx^m \wedge dx^k \wedge dx^l) = 0$ (因為 $\Gamma = 0$ ，普通的 ∂ 變成協變導數 ∇)

因為 $dx^m \wedge dx^k \wedge dx^l$ 是全反對稱，對指標 m、k、l 進行全反對稱化後結果為零，即

$$\nabla_m R_{jkl}^i + \nabla_k R_{jlm}^i + \nabla_l R_{jmk}^i = 0 \quad (2)$$

回到一般坐標系，因為(2)是一個張量方程，如果它在正規座標下成立，則它在任何座標下都成立。

愛因斯坦方程 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ ， $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ 是愛因斯坦張量， $T_{\mu\nu}$ 是能量動量張量。

(2)式作縮併(contraction)得到 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ 稱為 contracted Bianchi identity。

$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 即能量動量守恆。

流形的對稱性推出物理的守恆律。

諾特(Emmy Noether 1915 年)定理：每一種連續的對稱性，都對應著一個守恆量。

- (1) 時間平移對稱性 → 能量守恆。
- (2) 空間平移對稱性 → 動量守恆。
- (3) 空間旋轉對稱性 → 角動量守恆。
- (4) 規範對稱性 (Gauge Symmetry) → 電荷守恆。

§ 曲率即力場

1. Cartan 結構公式

ω : connection form , Ω : curvature form

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

2. 電磁場與 Clifford 代數

電磁學為一種特殊的規範場 (U(1)規範對稱性) :

電磁位能 A 對應於 ω , 電磁場張量 $F=dA$ 對應於曲率 Ω

Clifford 代數的介入：當我們引入 Clifford 代數時，向量場被提升為 Dirac 算子作用的空間。

在這種框架下，電磁場 F 可以被表示為 Clifford 積的一部分。

3. 黎曼曲率張量

將 Cartan 的抽象 Ω 投影到座標系或標架場 (Frame field) 上，就得到了黎曼曲率張量 R'_{ijk} 。

它衡量了向量在流形上沿著閉合曲線進行平行移動 (Parallel Transport) 後產生的變化。

4. Bianchi 恆等式 $DF = 0$

$$(1) \text{ 幾何形式：} \nabla_l R_{ijkm} + \nabla_j R_{ilk m} + \nabla_i R_{ljk m} = 0$$

(2) 物理推論：透過對 Bianchi 恆等式的收縮 (Contraction)，可以導出愛因斯坦張量 $G_{\mu\nu}$ 的散度為零 ($\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$)。

幾何的對稱性 (Bianchi) 直接決定了物理的律則 (守恆律)。

概念	幾何對象	物理對應	核心意義
Cartan 公式	聯絡 ω 與曲率 Ω	位能 A 與 場強 F	定義「場」如何從「勢」中產生
Clifford 代數	自旋結構 / Dirac	電子自旋 / 量子電	描述物質場 (費米子) 與幾何的交互作用
曲率張量	R_{ijkl}	重力場強度	空間幾何的不變量
Bianchi 恆等式	$D\Omega=0$	能量動量守恆	幾何結構限制了物理流動的可能性