§ Metric Connection [GA4.1]

Let E be a vector bundle on the differentiable manifold M with bundle metric $\langle .,. \rangle$

A connection D on E is called metric if $d\langle \mu, v\rangle = \langle D\mu, v\rangle + \langle \mu, Dv\rangle$

for all $\mu, v \in \Gamma(E)$ (4.2.1)

A metric connection thus has to respect an additional structure， namely the metric。

We want to interpret condition (4.2.1)。

Let $X \in T_x M$ then (4.2.1) means $X\langle \mu, v\rangle = \langle \mathrm{D_X}\mu, v\rangle + \langle \mu, Dv\rangle$

例

設底流形 $M = R^2$ ，向量叢 $E = M \times R^2$

定義內積 $\langle \mu, v\rangle := \mu^T G(p) v$ 其中 $G(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$

則對於截面 $\mu = (\mu^1, \mu^2)^T, v = (v^1, v^2)^T$

$\langle \mu, v\rangle = \mu^1 v^1 + e^{2x}\mu^2 v^2$

我們要定義一個 connection D，使其與度量相容，即滿足上面(4.2.1)

在局部座標下 我們用 connection 1-form 來描述。對任意切向量場 X，令

$D_X \mu = X_\mu + \omega(X)_\mu$ 其中 X_μ 是對係數求方向導數，而 $\omega(X)$ 是一個 2×2 矩陣，線性依賴於X。我們需要確定 ω 使得度量相容條件成立。

相容條件等價於 $XG = \omega(X)^T G + G_\omega(X)$ for all X

計算 G 的導數： $\partial_x G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2x} \end{pmatrix}, \partial_y G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

因此 對於 $X = \partial_x$ 我們需要 $\omega(\partial_x)^T G + G_\omega(\partial_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2x} \end{pmatrix}$

設 $\omega(\partial_x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 則

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

得 a=0，d=1，$b + ce^{2x} = 0$ 取 b=c=0 則 $\omega(\partial_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

對於 $X = \partial_y$ 因為 $\partial_y G = 0$ 可取 $\omega(\partial_y) = 0$ 這樣我們就定義了一個 connection

$$D_{\partial_x}\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \mu^1 \\ \partial_x \mu^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \mu^1 \\ \partial_x \mu^2 + \mu^2 \end{pmatrix}, \quad D_{\partial_y}\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \mu^1 \\ \partial_y \mu^2 \end{pmatrix}$$

驗證 4.2.1

對任意截面 μ,v ，任意切向量 X，

$$d\langle \mu,v\rangle = \langle D_X \mu,v\rangle + \langle \mu, D_X v\rangle$$

由於這是線性等式，我們可以選取幾個具體的截面來驗證，並確認對所有X 成立。

例

取 $\mu = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，內積 $\langle \mu,v\rangle = x\cdot 1 + e^{2x}\cdot y\cdot 0 = x$ 所以 $d\langle \mu,v\rangle = dx$ 即

$$\partial_x \langle \mu,v\rangle = 1, \partial_y \langle \mu,v\rangle = 0$$

計算 $D_{\partial_x\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ ， $D_{\partial_x} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

於是 $\langle D_{\partial_x}\mu, v\rangle = (1,y)G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + e^{2x}\cdot y\cdot 0 = 1$ ， $\langle \mu, D_{\partial_x} v\rangle = 0$

4.2.1 驗證成立。

例 驗證 S^2 上的情形

E：tangent bundle TS^2 $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ，則 $\langle \partial_\theta, \partial_\theta\rangle = 1, \langle \partial_\phi, \partial_\phi\rangle = \sin^2\theta$

設 $\mu = \partial_\phi, v = \partial_\phi$ 驗證 $d\langle \mu,v\rangle = \langle D\mu, v\rangle + \langle \mu, Dv\rangle$

則左式 $d\langle \mu,v\rangle = d\langle \partial_\phi, \partial_\phi\rangle = d(\sin^2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$$D_{\partial\theta}\partial\phi = \Gamma^\theta_{\theta\phi}\partial_\theta + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\partial_\phi = \cot\theta\partial_\phi$$

右式 沿 ∂_θ 方向 $\langle D_{\partial_\theta}\partial_\phi, \partial_\phi\rangle + \langle \partial_\phi, D_{\partial_\theta}\partial_\phi\rangle = 2\cot\theta\langle \partial_\phi, \partial_\phi\rangle = 2\sin\theta\cos\theta$

這保證了：如果你沿著球面的測地線平行移動一個向量，它的長度會保持不變。