§ Dual Connection

先解釋降指標

(M,g)是一個黎曼流形 例S^2 $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

∇與 g 相容 即$\nabla g = 0$

降指標 $X \to X^b = g(X,\cdot)$

設$X = \partial\phi, Y = a\partial\theta + b\partial\phi$則$g(X,Y) = ... = b\sin^2\theta$

所以$X^b = \sin^2\theta d\phi$

$X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 則$X^b = g_{ij}X^i dx^j$

§

E 是 vector bundle，E^*:E 的 dual space $\{f \mid f; E_p \to R$(或 C)的線性函數$\}$

餘切向量(1-form 在該點的值)作用在切向量上得到一個實數。

$X \in \Gamma(E)$ 稱為 E 的截面，$\xi \in \Gamma(E^*)$ $\forall v \in TM$

$v[\langle \xi, X\rangle] = \langle \nabla_v^*\xi, X\rangle + \langle \xi, \nabla_v X\rangle$是 Leibnitz 法則 定義 dual connection

$\langle \nabla_v^*\xi, X\rangle = v[\langle \xi, X\rangle] - \langle \xi, \nabla_v X\rangle$

例 電磁場

U(1)規範場 帶電粒子的波函數ψ，電磁勢 A 給出一個連絡$\nabla = d + iA$

反粒子的波函數ψ^* 受到$\nabla^* = d - iA$的作用。

對 pair $\langle \omega, X\rangle$進行微(積)分

$\nabla\langle \omega, X\rangle = \langle \nabla^*\omega, X\rangle + \langle \omega, \nabla X\rangle$ 是 integration by parts

§

若 connection form 表為$\omega = \omega_i^j$ $\nabla_{e_i} = \omega_i^j e_j$ 則

Curvature form 為$\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega$

$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ 是 Cartan structure equations 第二式

Bianchi 恆等式是$d\Omega_j^i = \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k$

§ Yang-Mills 場

場強$F = dA + A\wedge A$ A 是 gauge potential

定理

F 是 connectuon D 的 curvature 則 DF=0