§ Hodge 定理與 Milgram-Rosenbloom 定理合併

在 compact 黎曼流形上，拓撲資訊(上同調群 $b_k = \dim H^k = \dim\ker\Delta_p$)可以完全由幾何結構中的特定 PDE(harmonic form)來代表。

Milgram-Rosenbloom 定理：

給定初始微分形式 ω_0，讓它隨時間 t 按照熱傳導方式擴散。

$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\Delta\omega$ 當 $t \to \infty$，任何 closed form 都會收斂到一個 harmonic form。

Hodge 定理：

每一個上同調類中，恰有一個調和代表類(能量最低)。

意思是我們可以用 PDE 的方法來研究幾何。

例如 我們想知道一個流形的 betti number b_k，只需計算 $\Delta\alpha = 0$ 有多少組獨立解。

1. 建立熱方程(heat flow)

   $$\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} + \Delta\omega(x,t) = 0 \quad \text{with initial p-form} \quad \omega(x,0) = \omega_0(x)$$

   (1) 存在性

   $\Delta = d\delta + \delta d$ 是自伴橢圓算子，在 compact 流形上的譜為離散譜 $\{0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \to \infty\}$ 且對應的 eigen p-form $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 構成 L^2 space 的一組標準正交基。

   給定 initial $\omega(x,0) = \omega_0(x)$，展開 $\omega_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x), a_n = <\omega_0, \phi_n>_{L^2}$

   若解存在則其形勢應為 $\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}\phi_n(x) \quad \cdots(*)$

   逐項微分 $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \sum -a_n\lambda_n e^{-\lambda_n t}\phi_n$ ， $\Delta\omega = \sum a_n e^{-\lambda_n t}\Delta\phi_n = \sum a_n e^{-\lambda_n t}(\lambda_n\phi_n)$

   確實 $\frac{\partial\omega}{\partial t} + \Delta\omega = 0$

   這裡還須先確認(*)在 t>0 時的 L^2 收斂性與平滑性。

   (2) 唯一性

   設對相同的 initial condition 存在不同的解 $\omega_1(x,t), \omega_2(x,t)$

   令 $\eta(x,t) = \omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)$ 則

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Delta\eta = 0 \text{ ，} \eta(x,0) = \omega_1(x,0) - \omega_2(x,0) = 0$$

令 $E(t) = (\eta,\eta) \geq 0$ ，則

$$\frac{d}{dt}E(t) = 2(\frac{\partial \eta}{\partial t},\eta) = 2(-\Delta\eta,\eta) = -2(\|d\eta\|^2 + \|\delta\eta\|^2) \leq 0$$

$E(0) = \|\eta(x,0)\|^2 = 0$ ，所以 $E(t) \leq 0$ 因此 E(t)=0，implies $\eta = 0$

2. 證明 energy 單調下降，能量最小化

$$E(\omega) = \frac{1}{2}\int_M (|d\omega|^2 + |\delta\omega|^2)dV_g = \frac{1}{2}(d\omega,d\omega) + \frac{1}{2}(\delta\omega,\delta\omega)$$

$$\frac{d}{dt}E(\omega) = (\frac{\partial}{\partial t}d\omega,d\omega) + (\frac{\partial}{\partial t}\delta\omega,\delta\omega)$$

$$= (d\frac{\partial}{\partial t}\omega,\delta\omega) + (\delta\frac{\partial}{\partial t}\omega,d\omega) = (\frac{\partial}{\partial t}\omega,d\delta\omega) + (\frac{\partial}{\partial t}\omega,\delta d\omega)$$

$$= (\frac{\partial}{\partial t}\omega,(d\delta + \delta d)\omega) = (\frac{\partial}{\partial t}\omega,\Delta\omega) = (\frac{\partial}{\partial t}\omega,-\frac{\partial}{\partial t}\omega) \leq 0$$

因此 heat flow 是 Laplacian energy 的 gradient flow。
這表示解會逐漸耗散掉所有非 harmonic 成分。
配合 Laplacian 的離散譜分解，可得： $\omega(t) \to H\omega_0$
這表示 $E(\omega(t))$ 漸減，所以在 $t \to \infty$ 實有最小值。

3. 證明 $\omega(t) \to H\omega$ (收斂到 harmonic form)
$\Delta = d\delta + \delta d$ 是自伴橢圓算子，在 compact 流形上的譜為離散譜

$\{0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \to \infty\}$ 且對應的 eigen p-form $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 構成 L^2 space 的一組標準正交基。

$$\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}\phi_n(x)$$

當 $t \to \infty$ 時，所有對應 $\lambda_n > 0$ 的項都會承指數級數衰減而趨近於 0，剩下對應 $\lambda_0 = 0$ 的部分，即調和分量 $a_0\phi_0$

因此 $\lim_{t\to\infty}\omega(t) = H\omega_0$ 其中 H 是將形式投影到 Harmonic space（拉普拉斯算子的核）的正交投影。

4. 證明 flow 永遠在同一個 cohomology class 中
已知 $d\omega_0 = 0$

$$\omega_t - \omega_0 = \int_0^t \frac{\partial \omega_s}{\partial s} ds = -\int_0^t \Delta\omega_s ds = -\int_0^t (d\delta + \delta d)\omega_s ds \quad \text{其中 } d\omega_s = 0$$

$$= -d\int_0^t \delta\omega_s ds = d\eta \quad \text{其中 } \eta = -\int_0^t \delta\omega_s ds$$

所以$[\omega_t] = [\omega_0]$ for all t