§ de Rham cohomology [GA3.4]

$\alpha \in \Omega^p(M)$ is closed p-form if $d\alpha = 0$ ($\alpha \in \ker d$)；if $\exists \beta \in \Omega^{p-1}(M)$

such that $\alpha = d\beta$ then α is an exact p-form ($\alpha \in \operatorname{Im} d$)

$\alpha, \beta \in \ker d$ ，if $\alpha - \beta \in \operatorname{Im} d$ then $\alpha \sim \beta$

$H_{dR}^p(M) := \dfrac{\ker d}{\operatorname{Im} d}$ (稱為 p-th de Rham cohomology group(space))。

Theorem 4.17 (Poincaré duality). *Let M be a C^∞ compact oriented manifold of dimension m. Then the natural pairing*

$$H_{dR}^p(M) \otimes H_{dR}^{m-p}(M) \longrightarrow H_{dR}^m(M) \cong \mathbb{R}: \quad (\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta,$$

is a perfect pairing. In particular,

$$H_{dR}^p(M) \cong H_{dR}^{m-p}(M)^*.$$

Poincare lemma：

If M is contractible then $H_{dR}^p(M) \cong \begin{cases} R, p = 0 \\ 0, p \geq 1 \end{cases}$

de Rham cohomology theorem：

對於光滑流形 M， $H_{dR}^k(M) = \ker d / \operatorname{Im} d \cong H^k(M, R)$

也就是 deRham 上同調同構於流形的實係數奇異(singular)上同調群。

定理 3.4.1 Hodge theorem

M 是一個 closed(compact+boundaryless)光滑的黎曼流形，作用在 differential form 上的 Hodge-Laplace 算子 $\Delta = d\delta + \delta d$ 是一個線性二階橢圓型 PDE 算子。

1. 在每個 de Rham 上同調類 $[\omega] \in \mathrm{H}_{dR}^p(M, R)$ 中，存在唯一的 harmonic form α ($\Delta\alpha = 0$)，是該上同調類中能量最小的代表元。

2. Harmonic form space $H^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) | \Delta\omega = 0\}$ 是有限維的。

3. $\Omega^p(M) = \mathrm{H}^p(M) \oplus d\Omega^{p-1}(M) \oplus \delta\Omega^{p+1}(M)$

橢圓算子的基本性質：

(1)正則性(regularity)：若 $\Delta u = f$ 且 f 光滑則 u 光滑。

(2)Garding 不等式與能量估計

(3)Rellich-Kondrachov 嵌入定理

基本上有三種證法。

1. 變分法(p.144)
2. 算子分析法(Fredholm 理論法)
3. Heat flow method

變分法	Dirichlet 原理、弱解	在 Sobolev 空間中尋找能量泛函的極小值，證明 Laplacian 方程解的存在性。
熱流法	熱方程、熱核、半群理論	研究熱算子 $e^{-t\Delta}$ 當 $t\to\infty$ 的極限行為，收斂到調和形式的投影。
算子法（Fredholm 理論法）	橢圓算子、偽微分算子、Fredholm 算子	直接將 Δ 視為 Hilbert 空間上的有界線性算子（經過緊擾動），利用其 Fredholm 性質推導有限維核與閉像。

考慮 $\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t}=-\Delta\alpha \\ \alpha(0)=\alpha_0 \end{cases}$ 這裡 $\Delta=d\delta+\delta d$ 是 Hodge-Laplace 算子，$\alpha(t)$ 是隨時間演化的 differential form，解是 $\alpha(t)=e^{-t\Delta}\cdot\alpha_0$ ，$e^{-t\Delta}$ 稱為 heat kernel operator。

在 compact manifold 上，Δ 的譜是離散且非負的

$0=\lambda_0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$

將 α_0 用 ϕ_n 展開，$\alpha_0=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n$ （ϕ_n 稱為 eigenform)則 $\alpha(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n t}\phi_n$

當 $\lambda_n>0$ $e^{-\lambda_n t}\to 0$ as $t\to\infty$

當 $\lambda_n=0$ $\cdots$

所以當 $t\to\infty$ 時，$\alpha(t)$ 收斂到 α_0 在 harmonic space $H^k(M)$ 的正交投影上，

$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=H(\alpha_0)$

又，因為 $d\Delta=\Delta d$

$\frac{\partial}{\partial t}(d\alpha)=d(\frac{\partial}{\partial t}\alpha)=d(-\Delta\alpha)=-\Delta(d\alpha)$

如果初始時 $d\alpha_0=0$ 則對所有 t， $d\alpha(t)=0$ ，可進一步證明 $\alpha(t)-\alpha_0$ 在整個演化過程中都在同一個上同調類中進行。

例 $S^1, g=d\theta^2, \theta\in[0,2\pi)$ 是局部座標

上同調群 $H^1(S^1,R)$

1. 1-form $\omega=f(\theta)$ $\because S^1$是 1-dim $\therefore d\omega=0$ 所有的 1-form 都是 closed
2. Exact form：若 $\omega=dg=g'(\theta)d\theta$ 則 ω 是 exact

   為了讓 $g(\theta)$ 在 S^1 上平滑， $g(0)=g(2\pi)$

   $$\int_{S^1}\omega=\int_0^{2\pi}g'(\theta)d\theta=g(2\pi)-g(0)=0$$

   所以 ω 是 exact $\Leftrightarrow \int_{S^1}\omega=0$

   例如 $\sin\theta d\theta=d(-\cos\theta)$ 是一個 exact form

   $d\theta$ 與 $d\theta+\sin\theta d\theta$ 是在同一個 class 中。

   要在[w]中找到一個 $\alpha=f(\theta)d\theta$ 使得 $\Delta\alpha=0$

   在平坦度量下，$\Delta\alpha=0$ 相當於 $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2}=0$ $f(\theta)=a\theta+b$ 但 f 是週期函數 所以 $f(\theta)$=const。

   S^1 上每一個一階上同調類中唯一的 harmonic form 為 constant $ad\theta$

例 $T^2=S^1\times S^1$ 座標(x,y) $x,y\in[0,1)$， $g=dx^2+dy^2$

一階上同調類 $H^1(T^2,R)$ harmonic 1-form 為 adx+bdy

二階上同調類 $H^2(T^2,R)$ harmonic 2-form 為 $dx\wedge dy$

Definition 3.4.1 The p-th *homology group* $H_p(M,\mathbb{R})$ of a compact, differentiable manifold M is defined to be $(H^p_{dR}(M,\mathbb{R}))^*$. The p-th *Betti number* of M is $b_p(M) := \dim H^p(M,\mathbb{R})$.

n 維環面的第 k 個 betti 數 $\beta_k(T^n)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$，所於二維環面 T^2，Hodge 定理：

$$\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{T}^2)=\beta_1(T^2)=2$$

$H^1(T^2)=\{adx+bdy\,|\,a,b\in R\}$ 所以 dim=2

定理 3.4.2

Let M be a compact,oriented,differentiable manifold of dimension n。

The bilinear form $(\omega,\eta)\to\int_M\omega\wedge\eta$ is nondegenerate，and hence

$H^p_{dR}(M,R)$ is isomorphic to $(H^{n-p}_{dR}(M,R))^*$。

Corollary 3.4.4 *Let M be a compact, oriented, differentiable manifold of dimension d. Then*

$$H^d_{dR}(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \tag{3.4.23}$$

and

$$b_p(M) = b_{d-p}(M) \quad \text{for} \quad 0 \leq p \leq d. \tag{3.4.24}$$

Theorem 4.13 (Hodge decomposition theorem). *Let $\mathbb{H} = \mathbb{H}^p := \{\alpha \in A^p(M) \mid \triangle \alpha = 0\}$ be the space of harmonic p-forms.*

(1) $\dim \mathbb{H} < \infty$, *and*

(2) $A^p = \mathbb{H} \oplus^\perp \triangle A^p$. *That is,* $\operatorname{Im} \triangle = \mathbb{H}^\perp$.

例

考慮一個 compact 黎曼曲面，例如一個虧格=2 的封閉黎曼曲面Σ，要解 1-form 方程

(1)拓撲背景：該曲面的$\beta_1 = 2g = 4$

(2) Hodge 定理：存在 4 個線性獨立的 harmonic 1-form $\omega_1,\ldots,\omega_4$ 這些 form 同時滿足$d\omega = 0, \delta\omega = 0$，因此它們是 Laplace 方程$\Delta\omega = 0$的解。

(3)PDE：給定任何封閉的 1-form α (代表一個 de Rham 上同調類)，可以將它唯一分解$\alpha = \omega + d\phi$，ω 是 harmonic form，$d\phi$是 closed form。

§ Hodge 定理的應用

1. 計算或驗證拓撲不變量(betti number)
2. 複幾何中的 Hodge 分解
3. Bochner method 與消沒定理

   例 如果一個緊緻黎曼流形具有正的里奇曲率，則該流形上不存在非零的調和 1-形式。
4. 物理中的 gauge 理論

   在真空中，物理上的電磁場本質上就是該時空流形上的調和 2-形式。如果時空具有非平凡的拓撲（例如存在蟲洞或虧格），Hodge 定理保證了這些真空場解的存在性。
5. 譜幾何與熱核