§ The heat flow and harmonic forms

M 是一個 compact Riemannian manifold 則每一個 $H^p(M)$ 中的上同調等價類 (cohomology class)恰有一個 harmonic form 與之對應。

1. 建立熱方程

   定義一個 Hodge Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$

   給定一個 closed k-form ω_0

   考慮 $\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\Delta \omega_t \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases}$ 這個方程的解為 $\omega_t = e^{-t\Delta}\omega_0$

2. 上同調類的不變性

   因為 $d\Delta = \Delta d$

   $\dfrac{\partial}{\partial t}(d\omega_t) = d(\dfrac{\partial \omega_t}{\partial t}) = -d(\Delta\omega_t) = -\Delta(d\omega_t)$

   $d\omega_0 = 0$，由解的唯一性，$d\omega_t = 0$ for all $t \geq 0$

   $\omega_t - \omega_0 = \int_0^t \dfrac{\partial \omega_s}{\partial s} ds = -\int_0^t \Delta\omega_s ds = -\int_0^t (d\delta + \delta d)\omega_s ds$

   因為 $d\omega_s = 0$ 所以 $\omega_t - \omega_0 = -d(\int_0^t \delta\omega_s ds)$ 是一個 exact form

   即 ω_t, ω_0 在同一個上同調類中。

3. 收斂性與調和形式的產生

   在 compact 流形上，Δ 的譜是離散且非負的

   $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$

   設 $\omega_0 = \omega_H + \sum_{i>0} a_i\phi_i$ ，ω_H 是特徵值為 0 的部分，ϕ_i 是 $\lambda_t > 0$ 的部分

   則 $\omega_t = e^{-t\Delta}\omega_0 = \omega_H + \sum_{i>0} a_i e^{-\lambda_i t}\phi_i$ let $t \to \infty$ $e^{-\lambda_i t} \to 0$

   $\lim_{t\to\infty} \omega_t = \omega_H$ （$\Delta\omega_H = 0$ 就是我們要的東西。）

4. 唯一性

   略

附註

算子 $e^{-t\Delta}$ 稱為熱半群(heat semigroup)或熱算子，定義是

1. 對∀ k-form $\omega = \sum a_i\phi_i$ ，$e^{-t\Delta}\omega := \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} a_i \phi_i$

   這裡 $\{\phi_i\}$ 是 eigenform

2. $(e^{-t\Delta}\omega)(\mathrm{x}) = \int_M K_t\ (x,y)\omega(y) dV$

$K_t(x,y)$是 heat kernel

$\lim_{t \to 0^+} K_t(x,y) = \delta(x-y)$

3. Semigroup property

(1) $e^{-0\Delta} = Id$

(2) $e^{-s\Delta}e^{-t\Delta} = e^{-(s+t)\Delta}$

(3) $\left\| e^{-t\Delta}\omega \right\|_{L^2} \le \left\| \omega \right\|_{L^2}$

在探討 Hodge 定理與熱流法的脈絡下，特徵形式 (Eigenform) 是理解流形譜幾何 (Spectral Geometry) 的基本構件。

簡單來說，特徵形式就是微分形式空間中的「特徵向量」。

$\Delta = d\delta + \delta d$ 滿足$\Delta\phi = \lambda\phi$的 k-formru 就稱為 eigenform。
若$\Delta\phi = 0$則稱ϕ是一個 harmonic form。

S^2上的上同調群為
$H^0(S^2) \cong R$

$H^1(S^2) = 0$ (在S^2上不存在非零的 1-harmoni form)

$H^2(S^2) \cong R$
R^3中的$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$限制在$S^2$上即為 volume form(面積)
用球面座標(θ,ϕ) $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi$
volume form 是$\omega_{vol} = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$
驗證$\Delta\omega = (d\delta + \delta d)\omega = 0$
因為ω是最高形式所以$d\omega = 0$
根據 Hodge star $*\omega_{vol} = 1$ 所以$\delta\omega = -*d*\omega_{vol} = -*d(1) = 0$
$\Delta\omega = 0$ 所以 ω是S^2上的 harmonic form。