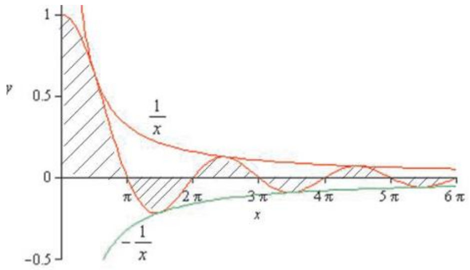
§ Dirichlet Integral

定義 1: 經典反常(improper)積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \qquad \frac{\pi}{2}$



左圖 $y=\frac{six}{x}$ (也稱為 sinc 函數)

[林琦焜 傳播季刊 36 卷 1 期]

[magazine/EvenSin]

可推出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

解 1 (Feynman) 考慮 $I(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$ $I'(a)=...$

$I(a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$ let $a\to 0$

解 2 Laplace Transform

解 3 Residue Theorem

習作 $\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3} = \qquad \frac{\pi}{4}$

定義 2： $D(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ 函數梯度的能量總和

在幾何分析中是

1. Harmonic map 能量
2. Minimal surface 的能量泛函
3. Ricci flow 的變分基礎

很多幾何 PDE 都來自 Derichlet-type energy

在流形 M 上， $E(u)=\int_M |\nabla u|^2 dV_g$ 這裡的梯度與體積元素都由度量 g 決定。

例 Dirichlet 原理說：在固定邊界值的所有函數中，調和函數最小化能量。

$\Omega = B_1(0)\subset R^2$ 單位圓盤

$u(x,y)=x^2-y^2$ ， $\Delta u = 0$ 所以 u 是 harmonic 函數

$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dxdy = ... = 2\pi$

換成 $v(x,y)=x^2+y^2$ $\Delta v = 4 \neq 0$ $\int_\Omega |\nabla v|^2\, dxdy = ... = 2\pi$

而現在這兩個函數在邊界上根本不同。在 r=1 上， $u(x,y)=x^2-y^2$ ，v(x,y)=1

邊界條件不同，所以不能比較。

在[幾何分析] p.117 中 寫成

$$\mathrm{E}(f):=\frac{1}{2}\int\left\langle gradf,gradf\right\rangle dx^1\wedge...\wedge dx^n=\frac{1}{2}\int\left\langle df,df\right\rangle dx^1\wedge...\wedge dx^n=\frac{1}{2}\int\sum_i(\frac{\partial f}{\partial x^i})^2dx^1\wedge...\wedge dx^n$$

一般而言 對開集 $\Omega\subset R^n$ 我們考慮 $E(f,\Omega):=\frac{1}{2}\int_\Omega\left\langle gradf,gradf\right\rangle dx^1\wedge...\wedge dx^n$

假設 $E(f,\Omega)\le E(g,\Omega)$ for all $g:\Omega\to R$ with the same boundary condition 即

g(y)=f(y) for all $y\in\partial\Omega$

則 $E(f,\Omega)\le E(f+t\eta,\Omega)$ for all $\eta:\Omega\to R$ with $\eta(y)=0$ for all $y\in\partial\Omega$ and all $t\in R$

We have…

$$\frac{d}{dt}E(f+t\eta,\Omega)\Big|_{t=0}=...=\int_\Omega\Delta f\eta dx^1\wedge...\wedge dx^n=0$$ for all η then $\Delta f=0$ in Ω

f 稱為調和函數(harmonic function)。

把這些推到黎曼流形上：

Let $f:M\to R$ be a function，X is a vector field 則

$$\left\langle gradf,X\right\rangle=X(f)=df(X)$$

$$divZ:=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}Z^j)$$

$$\Delta f:=-div(gradf)=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i})$$

$$(\Delta f,g)=(df.dg)=(f,\Delta g)$$

$$E(f):=\frac{1}{2}\int_M\left\langle df,df\right\rangle\sqrt{g}dx^1...dx^n=...=\frac{1}{2}\int_M g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\sqrt{g}dx^1...dx^n$$

Lemma 3.1.1 *A smooth critical point f of the energy integral E in the sense that*

$$\frac{d}{dt}E(f+t\eta)_{|t=0}=0 \tag{3.1.31}$$

for all $\eta:M\to\mathbb{R}$ with compact support in M is harmonic, i.e., $\Delta f=0$. □

§ Feymann 的密技

求 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=$

考慮 $I(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\times\frac{\sin x}{x}dx$

$$\frac{dI}{da}=\int_0^\infty -xe^{-ax}\times\frac{\sin x}{x}dx=-\int_0^\infty e^{-ax}\sin xdx=...=\frac{-1}{1+a^2}$$

$I(a) = C - \arctan a \quad I(a) \to 0$ as $a \to \infty$ 所以 $C = \dfrac{\pi}{2}$

最後 $a \to 0$ 得 $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x} dx = \dfrac{\pi}{2}$

跟做 Fourier transform 一樣。