§ 餘微分 δ

在黎曼幾何中，外微分算子 d 在 L^2 內積下的伴隨算子，正式名稱為餘微分 (codifferential)，通常記為 δ 。

定義

在一個 n 維、緊緻、無邊界的黎曼流形(M,g)上，我們可以在微分形式空間 $\Omega^k(M)$ 上定義 L^2 內積：$\langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge *\eta$

這裡 $*$ 是 Hodge star operator，它是將 k 形式映射為(n-k)-形式的同構。

δ 定義為 $\langle d\omega, \theta \rangle = \langle \omega, \delta\theta \rangle$

經過分部積分（斯托克斯定理）推導，可以得到 δ 的顯式公式

$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$

在 R^3 中，Hodge star operator：

0-form f $\;*f = f dx \wedge dy \wedge dz$

1-form $\;*dx = dy \wedge dz \quad *dy = dz \wedge dx \quad *dz = dx \wedge dy$

2-form $\;*(dy \wedge dz) = dx$

例 1

δ 作用於 1-form 相當於負的散度。 $\varphi = \sum_i \varphi_i dx^i$ 則 $d^*\varphi = -\sum_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x^i} = -div\varphi$

假設 $\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz$

先取 $*\omega$ $\quad *\omega = A_x(dy \wedge dz) + A_y(dz \wedge dx) + A_z(dx \wedge dy)$

外微分 $d*\omega$ $\quad d*\omega = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

取 $*d*\omega$ $\quad *d*\omega = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot A$

在 R^3 ，對於 1-form k=1， $\delta\omega = (-1)^k * d * \omega = -\nabla \cdot A$

例 2

δ 作用於 2-form 相當於旋度。

假設 $\eta = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$

$*\eta = B_x dx + B_y dy + B_z dz$

$d(*\eta) = \left(\dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \ldots$

$$*d*\eta = (\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z})dx + ...$$

2-form 時，k=2， $\delta\eta = *d*\eta = (\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z})dx + ... = (\nabla \times B)^b$