§ 正則值原像定理

$f:M\to N$ is a differentiable map，dimM=m，dimN=n， $m\ge n$

$p\in N$ ，df have rank n for all $x\in M$ with f(x)=p then p is a regular value of f。

$df(x):T_xM\to T_{f(x)}N$

Rankdf(x)=n 表示 df 是滿射(surjective)，此時 x 稱為 f 的正則點。

若 p 是 f 的正則值則 $f^{-1}(p)$ 是 M 的光滑子流形(dim=m-n)。

例

$f:R^3\to R\quad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\quad df=(2x,2y,2z)$

若 $(x,y,z)\ne(0,0,0)$ 則 df 是 surjective (i.e. df(x,y,z) have rank=1)

取 p=1 $\in R$ 則 $f^{-1}(1)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$ 即 S^2 是 R^3 的光滑子流形。

ker(df(x))= $\{v\in T_xM\,|\,df(x)v=0\in T_{f(x)}N\}$ = $T_x(f^{-1}(p))$

例

$f:M_{2\times2}(R)\to R^2,\ f(A)=(\det A,tr\mathrm{A})$

設 A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，f(A)=(ad-bc,a+d)

$$df(A)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial c} & \frac{\partial f_1}{\partial d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial c} & \frac{\partial f_2}{\partial d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -c & -b & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ rank 最大=2

(注意到 df(A)是 Jacobian 矩陣)

取 p=(1,0) 則 $f^{-1}(1,0)=\{A\,|\det A=1,trA=0\}$

$a+d=0,ad-bc=1\Rightarrow a^2+bc=-1$ 若兩列線性相關則 $\exists\lambda$ 使得

$(-a,-c,-b,a)=\lambda(1,0,0,1)$ 可以證明矛盾 所以兩列是線性無關，即在 $f^{-1}(1,0)$ 上的每一點，df 的 rank=2，亦即 p=(1,0)是 regular value， $f^{-1}(1,0)$ 是 M 的光滑子流形 dim=2 事實上 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ $x^2+yz=-1$ 是 R^3 中的雙曲面。

[N1003ImplicityTheorem]

證明 $X=\{(x,y,z)\in R^3\,|\,x^3+xyz+y^2=1\}$ 是一個二維流形。