§ 01 Tractrix(曳物線)，pseudosphere，Gaussian curvature K=-1

§ 02 sine-Gordon equation 與 sine-Gordon solitons

§ 03 從方程重建曲面

§ 04 Darboux transformation

馬蹄蓮(海芋)是多年生球莖植物，花朵有綠色、粉色、紅色、紫色、黃色、橙色、白色、黑色。原生於非洲南部。

[幾何 分析與形態生成]

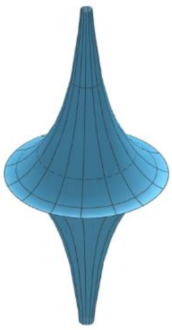
Marta Lewicka L.Mahadevan

[大自然的數學遊戲]Ian Stewart 提倡形態數學(morphomatics) p.188

藤本植物(vines，climbers)

§ 01 若拖曳者沿直線移動，被拖曳物體受拉力方向始終指向拖曳者，其軌跡即為曳物線。

拖曳線(tractrix)：$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sech}\,u \\ z = a(u - \tanh u) \end{cases}$



繞 z 軸的旋轉曲面即為偽球面(pseudosphere)：

$$\begin{cases} x(u,v) = a\,\mathrm{sech}(u)\cos v \\ y(u,v) = a\,\mathrm{sech}(u)\sin v \\ z(u,v) = a(u - \tanh u) \end{cases}$$

Pseudosphere surfaces with constant Gaussian curvature K=-1

$ds^2 = du^2 + 2\cos\phi\, du dv + dv^2$，where ϕ is the angle between the asymptotic lines。

The second fundamental form L=N=0，$M = \sin\phi$

And the Gauss-Codazzi equation is $\phi_{uv} = \sin\phi$

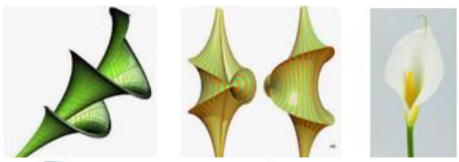
Theorem：

If a surface with K=-1 has the first fundamental form written as

$I = \cos^2\omega du^2 + \sin^2\omega dv^2$，then ω satisfies the so-called sine-Gordon equation：

$\omega_{uu} - \omega_{vv} = \sin\omega\cos\omega$

Differential Geometry in Physics by Gabriel Lugo p.147



這裡有 Bäcklund transforms 與 pseudosphere 的細節。

a) Kuen b) Breather c) Breather d) Ochuva

還有 Dini surface，Kuen surface，Calla Lily。

Surfaces with K=-1

The sine-Gordon equation is one of class of very special type of nonlinear partial differential equations which admit soliton solutions。

§ 02 Sine Gordon equation

1. $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = 0$

2. In light-cone coordinates (u,v) $u = \dfrac{x+t}{2}, v = \dfrac{x-t}{2}$ ， $\varphi_{uv} = \sin\varphi$

Soliton solutions：

1. Kink type
2. Breather type
3. Antikink type

sine-Gordon soliton 是上面方程的特殊(孤立子)解(kink type)：

$\phi(x,t) = 4\arctan(\exp(\pm\gamma(x - vt - x_0)))$

其中 v 是孤立子的速度。 x_0 是初始位置。 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ 是勞倫茲因子。

The Sine-Gordon equation has **kink** and **antikink** soliton solutions:

$$\phi(x,t) = 4\arctan\left(e^{\gamma(x-vt)}\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

- These solitons collide elastically, preserving their shape (a hallmark of integrability).
- The **inverse scattering method** can solve the equation exactly due to its **Lax pair** formulation.

DeepSeek：

The sine-Gordon equation governs the geometry of pseudospherical surfaces through the angle between asymptotic lines。

Soliton solutions represent persistent(一貫的)，particle-like deformations，while integrability via **Bäcklund transformations** allows systematic construction of complex surfaces。

This bridges nonlinear wave dynamics and differential geometry，revealing how solitons sculpt constant-negative-curvature manifolds。

§ 03 從方程重建曲面

如果你在偽球面上定義兩條漸近線，沿 u-方向和 v-方向走。那麼兩條漸近線之間的夾角 $\phi(u,v)$ ，就會滿足： $\phi_{uv} = \sin\phi$

即在這種參數化下，曲率條件 K = -1 可以被轉換成一個方程式，這個方程式就是 Sine-Gordon 方程式。

反之，給定任何一個滿足 Sine-Gordon 方程式的函數 $\phi(u,v)$ ，可以反推出一個對應的偽球面。(通過標架積分重建曲面。)

從 $\phi(u,v)$ 重建偽球面的參數化：
定義一組向量場 X(u,v)，採用 Darboux 標架 $\{e_1, e_2.e_3\}$

其中 $e_1 = \dfrac{\partial X}{\partial u}$ ，e_2 為切平面上與 e_1 夾角 ϕ 的單位向量， $e_3 = e_1 \times e_2$

標架滿足：

$\dfrac{\partial e_1}{\partial v} = \cos\phi e_2$ ， $\dfrac{\partial e_2}{\partial v} = -\cos\phi e_1 + \sin\phi e_3$ ， $\dfrac{\partial e_3}{\partial v} = -\sin\phi e_2$

相容性條件直接導出 sine-Gordon 方程。

通過解標架方程並積分，得到曲面的參數化：

1. 解標架方程：給定 $\phi(u,v)$ 滿足 sine-Gordon 方程，求解 e_1, e_2, e_3
2. 積分切向場 $X(u,v) = \int_0^u e_1(u',0)du' + \int_0^v e_2(u,v')dv'$

取 $\phi(u,v) = 4\arctan(e^{au+bv})$ 可顯示積分得偽球面參數化。
例如當 a=1，b=-1，得 $X(u,v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, u - \tanh u)$

§ 04 Darboux transformation

在從 sine-Gordon 方程重建偽球面的過程中，Darboux 變換扮演了關鍵角色。這種變換是可積系統中生成新解的代數方法，與曲面的幾何重建密切相關。

1. Darboux 變換與可積系統

   Darboux 變換的核心思想是通過對 Lax 對（描述可積系統的線性微分方程組）進行規範變換，從已知解生成新的解。對於 sine-Gordon 方程：

   $\phi_{uv} = \sin\phi$ 其 Lax 對通常形式為：

   $\begin{cases} \partial_u \Psi = U(\lambda,\phi)\Psi \\ \partial_v \Psi = V(\lambda,\phi)\Psi \end{cases}$ ，其中 Ψ 是波函數，U、V 是含譜參數 λ 的矩陣，ϕ 是方程解。

   Darboux 變換通過構造 Darboux 矩陣 $D(\lambda)$ ，將原 Lax 對變換為新 Lax 對，從而導出新解 $\tilde{\phi}$ 。

2. Darboux 矩陣的具體形式

3. 與偽球面重建的聯繫

   Darboux 變換驅動的重建流程

   (1) 從初始解 ϕ_0 出發，構造 Lax 對的解 Ψ_0

   (2) 應用 Darboux 矩陣 $D(\lambda)$ 得到新的波函數 $\tilde{\Psi} = D(\lambda)\Psi_0$

(3) 從 $\tilde{\Psi}$ 中提取新解 $\tilde{\phi}$ ，並通過 Darboux 標架積分重建曲面 $\tilde{X}(u,v)$

4. 例 單孤立子的 Darboux 矩陣 以 sine-Gordon 方程為例

考慮 sine-Gprdon 方程的單孤立子解 $\phi(u,v)=4\arctan(e^{au+bv})$

設譜參數 $\lambda=\mu$ ，則 $\mathrm{D}(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-\mu & \kappa e^{\theta}\\ \kappa e^{-\theta} & \lambda-\mu\end{pmatrix}$ ，其中 $\theta=\dfrac{\phi}{2}$ ， κ 是常數，依賴於 Bäcklund 參數。此矩陣作用後生成的新解對應更高階的孤子解或疊加解。

§ 05 self-duality and Backlund transformations

The sine-Gordon eqation is self-dual under the Backlund transformation。

[Hi!DeepSeek/in topics]

If ϕ and $\tilde{\phi}$ are two solutions, they satisfy:

$$\partial_x(\tilde{\phi}-\phi)=2\lambda\sin\left(\frac{\tilde{\phi}+\phi}{2}\right),$$

$$\partial_t(\tilde{\phi}+\phi)=\frac{2}{\lambda}\sin\left(\frac{\tilde{\phi}-\phi}{2}\right),$$

where λ is a spectral parameter.

- Applying this transformation twice leads back to the original equation, demonstrating **self-duality**.

Feature	Bäcklund Transformation	Darboux Transformation
Nature	Nonlinear PDEs linking solutions	Linear operator transformation
Scope	Works directly on PDE solutions	Acts on eigenfunctions/potentials
Typical Use	Sine-Gordon, KdV, Liouville	Schrödinger, NLS, AKNS systems
Duality	Often self-dual (e.g., Sine-Gordon)	Usually not self-dual

(3) Connection via Lax Pairs

- For many integrable PDEs (e.g., KdV, NLS), the **Bäcklund transformation can be derived from a Darboux transformation** applied to the associated Lax pair.
  - **Example**: The KdV equation's Bäcklund transform arises from dressing the Lax operator via Darboux.
- In geometric contexts (e.g., pseudospherical surfaces), both transforms appear as **gauge transformations**.

(4) Practical Implications

- **Bäcklund**: More useful for constructing **explicit solutions** (e.g., solitons) via PDE techniques.
- **Darboux**: More suited for **spectral analysis** (e.g., adding/removing bound states in quantum mechanics).

- **Bäcklund**: Originated in differential geometry (e.g., transforming surfaces of constant curvature).
- **Darboux**: Linked to **gauge theory** (e.g., dressing methods in soliton theory).

§ 06 sine-Gordon 方程在超導體裡的應用

長約瑟夫接面(long Josephson junction)，在長接面裡，sine-Gordon 的孤立子對應到物理上的磁通子（fluxon）。

(1) kink 解（孤立子）= 一個磁通子
(2) antikink 解 = 一個反磁通子（磁場方向相反）

這些磁通子可以在接面內移動、互相碰撞，而且有非常豐富的動力學行為，這些都是用 sine-Gordon 理論描述的。

有一種特殊的震盪解稱為 breather。

數學上，標準的靜態 (v=0) breather 解大概是這樣子：

$$\phi(x,t) = 4\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}\sin\omega t}{\omega\cosh(\sqrt{1-\omega^2}x}\right)$$

其中 $0<\omega<1$ 是 breather 的振動頻率。

參考書目

1. Geometrical interpretation of the solution of the sine-Gordon equation J.J.Klein
2. Differential Geometry in Physics by Gabriel Lugo p.147
3. 孤立子理論與應用 胡和生

§ Pseudosphere 的穩定性問題

$Index(J)=\infty$，高度不穩定。

因為 K=-1 導致

1. 測地線發散
2. 有無限多個不穩定模式：由於 non-compact，存在無限多種方式使得能量降低。