§ Darboux transformation

§01 KdV equation and its Darboux transformation

One-dimensional Schrodinger equation：$-\phi_{xx}-u(x)\phi=\lambda\phi$

(ϕ is a given function called potential function and λ spectral paremeter。)

一維定態薛丁格方程$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi=E\psi$ 取自然單位$\hbar=1,2m=1$

Darboux 發現(1882 年)

$$\begin{cases} u'=u+2(\ln f)_{xx} \\ \phi'(x,\lambda)=\phi_x(x,\lambda)-\frac{f_x}{f}\phi(x,\lambda) \end{cases} \cdots(1)$$

$(u,\phi)\to(u',\phi')$會 preserve 原方程，即$-\phi'_{xx}-u'(x)\phi'=\lambda\phi'$

(1)是最原始的 Darboux transformation。

§02 Darboux transformation for KdV 方程

$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$ KdV 方程 1885

$$\begin{cases} -\phi_{xx}-u\phi=\lambda\phi \\ \phi_t=-4\phi_{xxx}-6u\phi_x-3u_x\phi \end{cases} \cdots(2)$$

(2)式就稱為 KdV 方程的 Lax Pair

第一部分是一維薛丁格方程(空間部分的特徵值問題)

第二部分是時間問題，描述波函數的時間演化。

1. Lax 對：

   算子 L(Schrodinger 算子)：$L=-\partial_x^2+u(x,t)$

   這個算子出現在靜態的特徵值問題中：Lψ=$\lambda\psi$

   算子 A(演化算子)：A=$-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6u\frac{\partial}{\partial x}-3u_x$

   這個算子描述了波函數隨時間的演化：$\psi_t=A\psi$

2. 相容條件：

   KdV 方程等價於算子方程(即 Lax 方程)$\frac{\partial L}{\partial t}=[A,L]=AL-LA$

在 Darboux 變換的語境下，如果你是在尋找如何從一個已知解 u 構造新解 u'，通常會用到上述線性系統的解 ψ：

(1) 建立線性系統

$$\begin{cases} -\phi_{xx} - u\phi = \lambda\phi \\ \phi_t = -4\phi_{xxx} - 6u\phi_x - 3u_x\phi \end{cases}$$

(2) 透過 Darboux 變換構造新位能：$u' = u + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\psi$

3. 構造 Darboux 變換矩陣

引入對數導數 $\sigma = \dfrac{\psi_{1,x}}{\psi_1}$，構造 Darboux 變換矩陣 $D = \begin{pmatrix} \partial_x - \sigma & 1 \\ \sigma^2 - u_0 - \lambda & -\partial_x - \sigma \end{pmatrix}$

該矩陣將原 Lax 對轉換為新 Lax 對，對應勢函數 $u_1 = u_0 + 2\sigma_x$

4. 生成新解

例如若種子解為 $u_0 = 0$，特徵函數 $\psi_1 = \cosh(k(x - 4k^2t))$ 則

$$\sigma = \frac{\psi_{1,x}}{\psi_1} = k\tanh(k(x - 4k^2t))$$

新解為 $u_1(x,t) = -2k^2\,\mathrm{sech}^2(k(x - 4k^2t))$

Darboux 變換之所以將兩者聯繫起來，是因為 KdV 方程本質上描述了薛丁格算符位能在保持其散射數據（Scattering data）特定演化規律下的形變過程。

附錄：

The KdV equation：

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}, -\infty < x < \infty, 0 \le t < \infty$$

$$u(x,t) = f(x - ct) = \frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\theta \quad \text{，where} \quad \theta = \frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct + x_0)$$

從給一已知解生成新解的 AI prompt：

「請根據以下 KdV 的 Darboux 變換步驟，從$u_0 = 0$生成新解u_1：

1. 給定 Lax pair $L = -\partial_x^2 + u(x,t)$，$A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} - 3u_x$
2. 令$u_0 = 0$，解出對應的特徵函數ψ_1滿足$L\psi_1 = \lambda\psi_1$
3. 定義$\sigma = \frac{\psi_{1,x}}{\psi_1}$
4. 使用 Darboux 變換矩陣$D = \begin{pmatrix} \partial_x - \sigma & 1 \\ \sigma^2 - u_0 - \lambda & -\partial_x - \sigma \end{pmatrix}$
5. 透過變換得到新解$u_1 = u_0 + 2\partial_x\sigma$

請詳細展示推導過程與最終u_1的表達式。」

設$\lambda = -k^2$ 得到$u_1(x,t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4k^3 t)$ (振幅為$2k^2$，傳播速度為$4k^2$)

KdV 方程有無窮多個保守量。可以驗證單孤立子解u_1 的前兩個守恆值：

1. 質量$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dx$
2. 動量$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx$

§ 為什麼 sine-Gordon 方程$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = 0$也有 Lax 對

因為 sine-Gordon 方程在本質上描述了曲面的幾何變形，且與「矩陣形式」的譜問題（AKNS 系統）相容。

「考慮 sine-Gordon 方程的 Lax 對：

$\partial_x\Psi = U\Psi, \partial_t\Psi = V\Psi$，其中$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$，且$U = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \partial_t\phi & \lambda \\ \lambda & -\partial_t\phi \end{pmatrix}$，$V = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}$

$\phi_0 = 0$，生成新解ϕ_1 」

[孤立子理論中的達布變換及其幾何應用] 胡和生

1. 不同的算符類型：從純量到矩陣

KdV 方程對應的是單個函數的薛丁格方程，而 sine-Gordon 方程對應的是 2×2 矩陣形式的線性系統。

1974 年，Abowitz、Kaup、Newell 和 Segur 發現了一套統一的框架，稱為 AKNS 系統。

他們證明了許多非線性 PDE 都可以寫成如下的矩陣演化

空間演化：$\psi_x = U(\lambda, \phi)\psi$

時間演化：$\psi_t = V(\lambda, \phi)\psi$

對於 sine-Gordon 方程，其 Lax 對通常寫成包含 Pauli 矩陣的形式。這意味著 sG 方程的解ϕ決定了波函數ψ如何在空間與時間中「旋轉」。

2. 幾何意義：負常曲率曲面

這是 sine-Gordon 最迷人的「為什麼」。早在 Lax 對理論成熟之前，19 世紀的幾何學家就發現 sine-Gordon 方程描述了**偽球體（Pseudosphere）**，即高斯曲率 $K = -1$ 的曲面。

- 在微分幾何中，描述曲面的基本方程是 **Gauss-Codazzi 方程**。
- 如果你要求一個曲面的曲率恆等於 -1，這些幾何相容性條件（Compatibility conditions）會直接化簡為 sine-Gordon 方程。
- **幾何上的相容性條件，在數學物理中就是 Lax 對。**

因此，sG 方程有 Lax 對是因為它本質上是**空間曲率的幾何約束**。

3. 完全可積性的家族特徵

與有 Lax 對是完全可積的身分證。

sine-Gordon 方程、KdV 方程與非線性薛丁格方程共同具備以下特徵：

(1) 無限多個守恆律。

(2) 孤立子碰撞後的穩定性。
(3) 可以透過 IST 求解。

特徵	KdV 方程	sine-Gordon 方程
物理背景	淺水波、電漿波	晶格位錯、超導接面、曲面幾何
Lax 對類型	二階純量算符 (Schrödinger)	2×2 矩陣算符 (AKNS/ZS)
譜參數 λ	靜止的能量等級	像多普勒頻移一樣參與變換
幾何直觀	位能函數的演化	曲面切向量的旋轉