§ KdV 方程

§ The KdV equation：

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}, -\infty < x < \infty, 0 \le t < \infty \quad (1)$$

用以描述淺水波的演進，其中 $6uu_x$ 是非線性的部分，u_{xxx} 是相散的部分 (dispersive term)。

(色散：光波速度隨頻率改變的物理現象。)

Let $\xi = x - ct$ (c 是波速)

Let $u(x,t) = f(x-ct)$，(有點像 Lorentz transformation)

$$u_t = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -c\frac{df}{d\xi} \quad \text{then} \quad -cf' + 6ff' + f''' = 0 \ldots (2)$$

(1) 式到(2)式，時間 t 不見了？

是因為我們做了行波解（traveling wave solution）的假設。

其實不是「時間不見了」，而是通過變數變換將時間隱含在空間變數中，從而將 PDE 轉化為 ODE，便於求解。

看起來有點 Lorentz 變換的味道，DeepSeek 這麼說：

這確實是一種與 Lorentz 變換精神相通的數學手法：換個參考系，讓問題變簡單。

1. **時空合一**

   在 Lorentz 變換中，我們將時間和空間合併為一個四維時空座標 $(x,t) \to (\xi,\tau)$，以描述物體在不同慣性系中的運動。

   而在 KdV 行波解中，我們也引入 $\xi = x - ct$，將時間隱含在一個移動座標中，從而將偏微分方程轉化為常微分方程。

2. **不變形式**

   Lorentz 變換下，某些物理定律（如 Maxwell 方程）形式保持不變。

   在行波變換下，KdV 方程從 $u(x,t)$ 轉為 $f(\xi)$，方程形式簡化，但依然描述同一物理現象（水波傳播）。

3. **波速 c 的角色**

   在 Lorentz 變換中，光速 c 是時空轉換的關鍵常數。

   在 KdV 行波解中，c 是波傳播的速度，同樣是一個常數，決定了波的移動框架。

不同之處：

- **物理背景不同**

  Lorentz 變換是為了保持光速不變而發展的時空幾何變換；KdV 的行波變換則是為了解決非線性偏微分方程而引入的數學技巧。

- **變換維度**
  Lorentz 變換是線性且包含時間與空間的混合；KdV 的 $\xi = x - ct$ 是線性變換，但**不涉及時間縮放**，僅是平移。
- **是否保持波動方程形式**
  在 Lorentz 變換下，波動方程 $\partial_t^2\phi = c^2\partial_x^2\phi$ 形式不變。
  在 KdV 中，原方程是非線性且含三階導數，變換後成為 ODE，而非保持原 PDE 形式。

兩者都是通過座標變換將時間與空間綁在一起，從而簡化問題。
這種「行波座標」在物理與數學中非常常見，尤其是在處理波動力學、孤立子、非線性波等問題時。
這種變換讓我們能在一個隨著波一起移動的參考系中觀察波，此時波看起來是靜止的，問題大大簡化。

(2) 積分一次得 $-cf+3f^2+f''=A$ 將 f' 視為積分因子(即兩邊同乘以 f')

$$f'f''=Af'+cff'-3f^2f'$$

$$[\frac{1}{2}(f')^2]'=(Af)'+(\frac{c}{2}f^2)'-(f^3)'$$ 再積分得

$$(f')^2=2Af+cf^2-2f^3+B$$

考慮邊界值 $f, f', f'' \to 0$ as $x \to \infty$ then A=B=0

$(f')^2=cf^2-2f^3=f^2(c-2f)$，其中 $c-2f>0$

$$\int \frac{df}{f(c-2f)^{\frac{1}{2}}}=\pm\int d\xi$$ ，let $f=\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\theta$ then $c-2f=\ldots=c\tanh^2\theta$

其中

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$ ，$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x=-\tanh x \operatorname{sech} x$

$f'=\frac{df}{d\xi}, \xi=x-ct$ ，$df=c\operatorname{sech}\theta(-\tanh\theta\operatorname{sech}\theta)d\theta$

$$\int \frac{df}{f(c-2f)^{\frac{1}{2}}}=\ldots=\frac{-2\theta}{\sqrt{c}}=\pm(\xi+k)=\pm(\text{x-ct+x}_0)$$ ，$\theta=\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+x_0)$

$$u(x,t)=f(x-ct)=\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\theta$$ ，where $\theta=\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+x_0)$

§ Proposition (Miura)

If v is a solution to the modified KdV equation $v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=0$ then $u=v^2+v_x$ solves the KdV equation $u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$ 。

$$u_t = 2vv_t + v_{xt} = (\frac{\partial}{\partial x} + 2v)v_t$$

$u_x = 2vv_x + v_{xx}$ ， $u_{xx} = 2v_x^2 + 2vv_{xx} + v_{xxx}$

$$u_{xxx} = 4v_x v_{xx} + 2v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 6v_x v_{xx} + (\frac{\partial}{\partial x} + 2v)(v_{xxx})$$

$-6uu_x = -6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx})$展開，其中$-6v_x v_{xx}$與上式中的$6v_x v_{xx}$抵銷

$$-6(2v^3 v_x + v^2 v_{xx} + 2vv_x^2) = -6(\frac{\partial}{\partial x} + 2v)(v^2 v_x)$$

We have $(\frac{\partial}{\partial x} + 2v)(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0$

若 u 是已知，則$u = v^2 + v_x$是 v 的 Riccati equation。

$v = u_x + u^2$ 稱為 Miura(三浦)transformation。

§ Scattering and Inverse Scattering

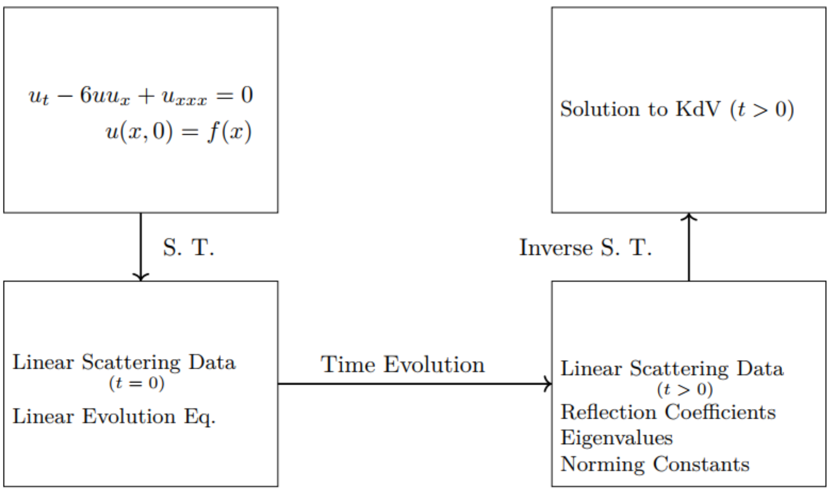


Figure 1: Idea of Scattering and Inverse Scattering

This method transforms the nonlinear problem into a linear problem in the form of a scattering problem，which can be solved more easily。

The solution to the original nonlinear equation is then reconstructed from the scattering data。

A process similar to the Fourier transform。

$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$的 Fourier transform 為 $\hat{u}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx$

$$u_t = u_{xx}, u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty$$

Where u=u(x,t) and f(x) has a Fourier transform。

Define Fourier transform $F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$

and inverse Fourier transform $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$

$\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-ikx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}(ue^{-ikx})dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-ikx}dx=\frac{\partial U}{\partial t}$，where U is the Fourier transform of u(x,t)。

在線性的時候，逆散射變換就是富氏變換。

Examples for Scattering and Inverse Scattering

One-soliton example： $u(x,0)=-2\operatorname{sech}^2 x$

1. Scattering Equation at $t=0$:

$$\psi_{xx}+[\lambda-(-2\operatorname{sech}^2 x)]\psi=0.$$

2. Substitute $T=\tanh x$:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left((1-T^2)\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)+\left(2+\frac{\lambda}{1-T^2}\right)\psi=0.$$

Solving this equation, we find ψ to be:

$$\psi(T)=\frac{1}{2}(1-T^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{sech} x.$$

3. Bound State: In the case of a bound state, we have:

$$\lambda_1=-1,\quad c_1(0)=2,\quad c_1(t)=2e^{8t}.$$

4. Unbound States: For unbound states, we deduce the behavior of ψ:

$$\psi(x)\sim\left(\frac{ik+1}{ik-1}\right)ae^{-ikx}\ \text{as}\ x\to\infty.$$

which gives us the remaining scattering data:

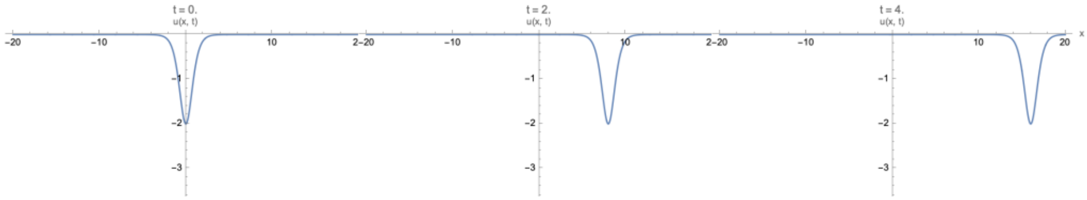
$$a(k)=\frac{ik-1}{ik+1},\quad b(k)=0.$$

We can then build our solution by inverse scattering:

$$\begin{aligned}B(x+y,t)&=2e^{8t-x-y},\\K(x,y,t)&=w(x,t)e^{-y},\\w(x,t)&=-e^{4t}\operatorname{sech}(x-4t),\\K(x,x,t)&=-e^{-x+4t}\operatorname{sech}(x-4t),\end{aligned}$$

which gives the one-soliton solution

$$u(x,t)=-2\operatorname{sech}^2(x-4t).$$



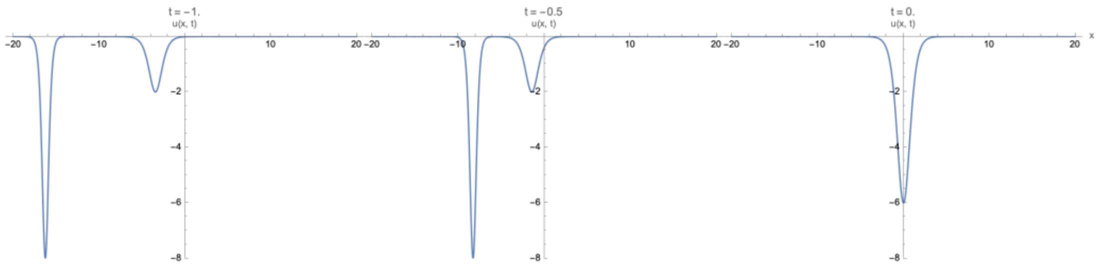
Two-soliton example： $u(x,0) = -6\operatorname{sech}^2 x$

1. $p=2$: Consider the case when there are two eigenvalues,

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\operatorname{sech}^2 x, \quad c_1(0) = 12$$
$$\psi_2 = \frac{1}{2}\tanh x \operatorname{sech} x, \quad c_2(0) = 6$$
$$b(k,0) = 0$$

2. Solution:

$$u(x,t) = -12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{(3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t))^2}.$$



§ The conservation law　KdV 有各種守恆律

Consider u(x,t)，T=f(u)，X=g(u)，and u satisfies the equation $\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$。

This is a conservation law with density T and flux X。

We have $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} T dx = -X\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$。When $X \to 0$ as $|x| \to \pm\infty$，implies that

$\int_{-\infty}^{\infty} T dx$ =constant。

Example：

$$0 = u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(-3u^2 + u_{xx}) = 0$$

$T = u, X = u_{xx} - 3u^2$ then $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ =constant，where we have taken $u, u_x, u_{xx} \to 0$

as $|x| \to \infty$

$$0 = u(u_t - 6uu_x + u_{xxx}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(-2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2)$$

Take $T = \frac{1}{2}u^2, X = -2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2$

So $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 = \text{constant}$。

以 KdV 方程為例 $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

1. Lax 對與選擇種子解

   KdV 方程的 Lax 對的空間部分： $L = -\partial_x^2 + u(x,t)$

   和時間演化部分：
   選擇種子解 $u_0(x,t)$ 與對應的特徵函數 $\psi_1(x,t)$ ，滿足

   $L\psi_1 = \lambda_1\psi_1, \psi_{1,xx} = (u_0 - \lambda_1)\psi_1$

2. 構造 Darboux 變換矩陣

   引入對數導數 $\sigma = \frac{\psi_{1,x}}{\psi_1}$ ，構造 Darboux 變換矩陣 $D = \begin{pmatrix} \partial_x - \sigma & 1 \\ \sigma^2 - u_0 - \lambda & -\partial_x - \sigma \end{pmatrix}$

   該矩陣將原 Lax 對轉換為新 Lax 對，對應勢函數 $u_1 = u_0 + 2\sigma_x$

3. 生成新解

   例如若種子解為 $u_0 = 0$ ，特徵函數 $\psi_1 = \cosh(k(x - 4k^2 t))$ 則

   $$\sigma = \frac{\psi_{1,x}}{\psi_1} = k\tanh(k(x - 4k^2 t))$$

   新解為 $u_1(x,t) = -2k^2\,\text{sech}^2(k(x - 4k^2 t))$