§ Harnack 不等式

如果一個調和函數是非負的，則它局部波動就不會太大。

(1) 橢圓型

R^n 中，$\Delta u = 0$ 且 $u \geq 0$

$x \in B_R(0), |x| = r < R$ 設 $\frac{r}{R} = k$ 則 $\frac{1-k}{(1+k)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1+k}{(1-k)^{n-1}} u(0)$

(2) 拋物型

u(x,t)是 $u_t = \Delta u$ 的正解，對於 t_1<t_2 存在 C 使得 $\sup_{x\in\Omega} u(x,t_1) \leq C \inf_{x\in\Omega} u(x,t_2)$

意思是說在同一個小球內，最大值≤常數×最小值

例 $u(x,y) = e^x \cos y$ 在 $B_R(0)$ 內討論

因為 x,y 都很小 $e^{-R} \leq e^x \leq e^R$

$\sup u \leq C \inf u$ ，$C = e^{2R}$

(3) Dirac 算子的 Harnack 估計

Lichnerowicz 公式 $D^2\psi = \nabla^*\nabla\psi + \frac{1}{4}R\psi$

若 ψ 是 harmonic spinor(即 $D\psi = 0$)則 Kato 不等式⋯

(4) Moser Harnack 不等式

在 Moser 之前，義大利數學家 Ennio De Giorgi 和美國數學家 John Nash 分別在 1957 年和 1958 年獨立地證明了具有有界可測係數的橢圓方程的解是 Hölder 連續的。De Giorgi 使用了基於幾何測度論的複雜方法，而 Nash 的方法則依賴於對熱核的精細估計。

Moser 的 Harnack 不等式提供了一個更簡潔、更優雅的途徑來推導出同樣的 Hölder 連續性結果。事實上，從 Harnack 不等式出發，可以非常直接地推出解的 Hölder 連續性 。因此，Moser 的工作與 De Giorgi 和 Nash 的工作一起，構成了 De Giorgi-Nash-Moser 理論的核心，這個理論是處理具有不光滑係數的 PDE 正則性問題的基石 。

非局部算子、幾何流等問題是當代研究的熱點。Moser 的思想在這些前沿領域依然充滿活力。

- **非局部算子**：對於分數階拉普拉斯算子等非局部問題，數學家們發展了非局部版本的 Moser 迭代，用以證明解的有界性和 Harnack 不等式，這是研究非局部極小曲面等問題的基礎 。
- **幾何分析**：在 Ricci 流、Kähler-Ricci 流等幾何流問題中，Moser 迭代及其衍生的 Harnack 估計（如微分 Harnack 估計）是研究奇點形成和長時間解行為的關鍵工具 。這也解釋了為何在您之前關注的研討會中，許多報告（如 Gang Tian, Hosea Wondo 的報告）都與此相關。

- **非標準增長條件**：對於具有可變指數增長條件的非線性方程，Moser 迭代經過適當修改後依然有效，用於證明弱 Harnack 不等式 。
- **新證明方法**：甚至對於 Moser 不等式本身，數學家們仍在尋找新的、更直接的證明。例如，M. V. Safonov（有趣的是，他也是您提供文件中一位演講者的名字）就發展了一種不依賴迭代的證明方法 。最近，也有研究試圖繞過對 Poincaré 不等式的依賴，從軌跡的角度給出新的幾何解釋 。

§ Harnack 不等式有三個重要結果
(1) Harnack 收斂定理
(2) Liouville 定理
(3) PDE regularity 可推出 (1)Holder 連續性 (2)gradient estimate (3)heat kernel bounds
在黎曼流形上，若 $Ric \geq 0$ ，$\Delta u = 0, u > 0$ 則 u 是常數。
丘成桐證明，在黎曼流形上，若 $Ric \geq 0$ 則(1)gradient estimate (2)Harnack 不等式 (3)Liouville 定理 都成立。

幾何分析或譜幾何：
Harnack $\Leftrightarrow$ heat kernel estimate $\Leftrightarrow$ volume growth $\Leftrightarrow$ Liouville 定理
這是 Thierry Coulhon，Alexander Grioryan 的重要理論。

1. M 是黎曼流形 V(x,r)=Vol(B(x,r))
   若滿足 $V(x,2r) \leq cV(x,r)$ 則稱為 volume doubling property
2. 設 $p_t(x,y)$ 是 heat kernel ($(\partial_t - \Delta)p_t = 0$)

   Gaussian estimate $p_t(x,y) \sim \frac{1}{V(x,\sqrt{t})}\exp(-\frac{d(x,y)^2}{ct})$
3. $\partial_t u = \Delta u \quad \cdots$
4. 若 $\Delta u = 0, u > 0 \quad \cdots$

Volume growth 決定了熱如何擴散 $\rightarrow$ heat kernel bounds 決定解的振盪 $\rightarrow$ harnack 不等式 限制全域的行為 $\rightarrow$ Liouville 定理。
和譜幾何的聯繫：
因為 $p_t(x,y) = \sum_{k=0} e^{-\lambda_k t}\phi_k(x)\phi_k(y)$

所以 heat kernel estimate 是特徵值得分布資訊 $N(\lambda) \sim C\lambda^{n/2}$ (Weyl)

Geometry $\rightarrow$ Heat flow $\rightarrow$ harmonic functions $\rightarrow$ Spectrum
所以 volume growth、heat kernel、Harnack、Liouville、eigenvalues 是同一資訊的不同面向！

§ differential Harnack 不等式
與古典的 Harnack 不等式（比較空間中兩點的值）不同，微分版本提供的是一

個關於對數梯度（logarithmic gradient）的點估計。它描述了正解在演化過程中，其空間導數與時間導數之間的約束關係。

Li-Yau 估計(1986)：$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\le\frac{n}{2t}$

令 $f=\log u$ 則不等式變成 $|\nabla f|^2-f_t\le\frac{n}{2t}$

例

$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$ 是 R^n 上的熱方程，其中 u>0 且是一個光滑的解。

假設我們有一個具體的解 例如熱方程的基本解 $u(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp(-\frac{|x|^2}{4t})$，這是 t=0 時放在原點的單位熱量。

$\log u=-\frac{n}{2}\log(4\pi t)-\frac{|x|^2}{4t}$，$\frac{\partial}{\partial t}\log u=-\frac{n}{2t}+\frac{|x|^2}{4t^2}$

$\nabla\log u=-\frac{x}{2t},|\nabla\log u|^2=\frac{|x|^2}{4t^2}$

因為 $\frac{|x|^2}{4t^2}\ge 0$ 所以 $\frac{\partial}{\partial t}\log u\ge-\frac{n}{2t}$

對於熱核，不等式的等號成立。這說明 Li-Yau 估計在 R^n 中是最優（Sharp）的。

這說明在任意 x 點，函數的對數時間成長率有一個與x 無關的統一的下界。

這就是微分 Harnack 的核心精神：它把空間的變化（梯度）和時間的變化結合起來，給出了一個不依賴於初始值的普適約束。

我們可以沿著一條連接 $(x_1,t_1),(x_2,t_2)$ 的路徑(其中 $t_1<t_2$)對這個微分不等式進行積分。積分後，對數項的差就會被路徑上的能量（長度）所控制，最終得到經典的 Harnack 不等式：

$u(x_2,t_2)\ge u(x_1,t_1)\times$(某個幾何因子)，$u(x_1,t_1)\le u(x_2,t_2)(\frac{t_2}{t_1})^{n/2}\exp(\frac{|x_1-x_2|^2}{4(t_2-t_1)})$

這告訴我們，熱不會瞬間消失，它在後期的值一定大於前期某個點的值乘以一個權重（這個權重依賴於距離和時間差）。

在幾何分析（特別是 Ricci 流）中，Richard Hamilton 和 Gregor Perelman 發展了更複雜的微分 Harnack 不等式。

例如在 Ricci 流中，它描述了曲率張量沿著流的方向的變化率，最終幫助

Perelman 證明了龐加萊猜想。

§ 黎曼流形上的 Harnack 不等式

在黎曼流形 (M,g) 上，若 Ricci 曲率非負 ($Ric \geq 0$)，則熱方程的正解同樣滿足上述的 Li-Yau 不等式。

如果流形的曲率有下界（例如 $Ric \geq -K$），不等式會多出修正項：

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha\frac{u_t}{u} \leq \frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)}$$

這裡 $\alpha > 1$ 是一個自由參數。這顯示了**幾何形狀（曲率）會直接限制物理演化（熱擴散）的梯度**。

§ Ricci 流

在 Hamilton 的 Ricci flow 理論中，微分的 Harnack 不等式是研究奇點形成的關鍵工具。

微分 Harnack 不等式的核心直覺是：

在一個擴散系統中，局部梯度的能量不能無限制地大於時間演化的速度。

它將空間與時間的變化率鎖定在一個與維度 n 和時間 t 相關的幾何邊界內。

§ Harnack 不等式從微分形式推導到積分形式(古典 Harnack 不等式)

1. 設定路徑

   時空中兩點 $(x_1,t_1),(x_2,t_2)\quad 0<t_1<t_2$

   定義連接這兩點的時空曲線 $\eta(s)=(\gamma(s),s)$ 其中 $s\in[t_1,t_2]$

   $\gamma(t_1)=x_1,\gamma(t_2)=x_2$ 為了計算方便取直線路徑，即 $\dot{\gamma}(s)=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$

2. 計算對數解沿路徑的全微分

   令 $f(x,t)=\ln u(x,t)$ f 沿這路徑的變化量 $\dfrac{d}{ds}f(\gamma(s),s)=\nabla f\cdot\dot{\gamma}+\dfrac{\partial f}{\partial s}$

3. 代入 Li-Yau 不等式

   回顧 Li-Yau 不等式的對數形式： $f_t \geq |\nabla f|^2-\dfrac{n}{2s}$

   $$\frac{d}{ds}f(\gamma(s),s)=\nabla f\cdot\dot{\gamma}+\frac{\partial f}{\partial s}\geq\nabla f\cdot\dot{\gamma}+|\nabla f|^2-\frac{n}{2s}$$

4. 配方

   $$|\nabla f|^2+\nabla f\cdot\dot{\gamma}=\left|\nabla f+\frac{1}{2}\dot{\gamma}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\dot{\gamma}\right|^2$$

所以 $\frac{d}{ds}f(\gamma(s),s) \geq -\frac{1}{4}\left|\dot{\gamma}\right|^2 - \frac{n}{2s}$

5. 積分並得出結果

   對 s 從 t_1 積分到 t_2 ，$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{ds}f(\gamma(s),s)ds \geq \int_{t_1}^{t_2}(-\frac{1}{4}\left|\dot{\gamma}\right|^2 - \frac{n}{2s})ds$

   左邊 $f(x_2,t_2) - f(x_1,t_1) = \ln\frac{u(x_2,t_2)}{u(x_1,t_1)}$

   右邊第一項，因為 $\dot{\gamma}$ 是常數，$\int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{4}\frac{\left|x_2 - x_1\right|^2}{(t_2 - t_1)^2}ds = -\frac{\left|x_2 - x_1\right|^2}{4(t_2 - t_1)}$

   第二項 $\int_{t_1}^{t_2} -\frac{n}{2s}ds = -\frac{n}{2}\ln\frac{t_2}{t_1}$

6. 最終形式

$$u(x_1,t_1) \leq u(x_2,t_2)(\frac{t_2}{t_1})^{n/2}\exp(\frac{\left|x_1 - x_2\right|^2}{4(t_2 - t_1)})$$

1. **從局部到整體：** 微分不等式只看一個點（局部），但透過積分，我們掌握了整個空間與時間的連結（整體）。
2. **幾何意義：** 在黎曼流形上，這個推導過程完全一樣，只是 $|x_2 - x_1|$ 會變成兩點間的**測地線距離** $d(x_1, x_2)$。
3. **最優路徑：** 如果我們不取直線而取其他曲線，積分值會變大，得到的界限就沒那麼「緊」。這解釋了為什麼歐氏空間中直線是最優的。