Dirichlet 問題：

$D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, 0 \le x^2 + y^2 < 1\}$

$\Delta u = 0$ in D；u(x,y)=f(x,y) on ∂D

Arnold 的方法是；在上半平面解 Dirichlet 問題，然後用一個 conformal mapping 拉回圓盤。
上半平面 H 座標用 (ξ, η) 表示，則 Poisson integral formula 為

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\eta}{(\xi - t)^2 + \eta^2} g(t) dt$$

$\omega = \xi + i\eta$ 換回 $z = re^{i\theta}$ 則圓盤的 Poisson kernel 變成

$$P(r, \theta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

將圓盤 D 映射到上半平面常用的映射函數為 $\omega = i\dfrac{1 - z}{1 + z}$

透過這個轉換得到單位圓盤上的解為 $u(r, \theta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) P(r, \theta - \varphi) d\varphi$

為什麼 Arnold 這樣做？

幾何直觀：上半平面的邊界是直線，其格林函數（Green's Function）可以透過簡單的「鏡像法(method of images)」得到。

簡化計算：直接在圓盤上推導 Poisson 積分需要處理複雜的級數展開，而透過共形映射則能將幾何結構的對稱性發揮到極致。