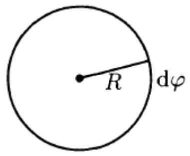
§ The mean-value theorem



The mean value of a harmonic function over a circle equals its value at the center。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\varphi = u(0)$$

定義 $M(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)d\varphi$

$$M'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi)d\varphi$$

散度定理 $\iint_{B_r}\Delta u dA=\int_{\partial B_r}\frac{\partial u}{\partial n}ds$ 在圓周上 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}$ ，$ds=rd\varphi$

左式 $\Delta u=0$ 右式 $=\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}rd\varphi$

當 r>0 意味著 $\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}d\varphi=0$ 所以 M(r)=const

Let $r\to 0$ $\lim_{r\to 0}M(r)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)d\varphi=u(0)$

$\Delta u=0$ 表示系統在穩定狀態。

Arnold 考慮 $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t}dt$ 稱為 Cauchy 積分

Cauchy 積分公式：

設 f(z)在 simlpe，closed curve γ 及其內部是全純的，a 是該區域內一點，則

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$

取 $z=a+re^{i\theta}$ $dz=ire^{i\theta}d\theta$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\times(ire^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$$