

定理 1

Every harmonic function in a simply connected domain of the plane is the real part of a holomorphic function (全純函數) which is defined in that domain up to an additive purely imaginary constant.

在單連通區域D上，任何調和函數u都是某個全純函數f的實部，且f在相差一個純虛常數的意義下唯一。

證法 1 vector field

找一個 holomorphic function $f=u+iv$ ，其中u是給定的 harmonic function，要找v。

考慮 $F = (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x})$ for a 2-dim vector field $F=(P,Q)$ $curF = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\text{So } curF = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) - (-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

在單連通區域中 $cur=0$ 的向量場 \Rightarrow 保守場

(在 R^3 中，對於一個向量場F，封閉對應的就是 $\nabla \times F = 0$ (無旋場))

存在v使得 $\nabla v = F = (-u_y, u_x)$

Let $f=u+iv$ then f holomorphic and $\text{Re}(f)=u$

若 v_1, v_2 皆為 harmonic conjugate 則 $\nabla(v_1 - v_2) = 0$ $v_1 - v_2 = const$

證法 2 differential form Arnold 是用 differential form 的方式解說：

考慮 $\alpha = (-u_y)dx + (u_x)dy$ 則 $d\alpha = -u_{yy}dy \wedge dx + u_{xx}dx \wedge dy = (u_{xx} + u_{yy})dx \wedge dy = 0$

又 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ， $\alpha = (-u_y)dx + (u_x)dy = v_x dx + v_y dy = dv$

$d\alpha = 0$ 區域的單連通性保證v的存在。(Arnold 定義 $v = \int_{x_0}^x \alpha$)

在一個單連通區域，一個 closed form 是 exact form。

證法 3 D-bar operator

$\bar{\delta} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ 稱為 D-bar operator (or CR operator)

f是全純函數 $\Leftrightarrow \bar{\delta}f = 0$ 。 $\bar{\delta}$ 是二維PDE的重要工具。

回到原定理：找 $f=u+iv$ 全純，即 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (u已知，v未知)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = i \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \quad (\text{因為 } u \text{ 是 real value 所以 } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)})$$

Let $\varphi(z) := \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ 原命題就是要找 $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = i\varphi(z)$ 的解 $v(z)$ 這是一個 $\bar{\delta}$ 非齊次方程

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{\varphi}(z)) = \varphi(z) + z \frac{\partial \bar{\varphi}(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) \quad (\text{因為 } \Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(iz\bar{\varphi}(z)) = i\varphi(z)$$

$v_0(z) = iz\bar{\varphi}(z) = iz \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ 即為 f 所需的 v 的一個特別解。

或者 由 $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = i \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ 因為 simply connected

$$v(z) := \text{Im} \left(\int_{z_0}^z 2i \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \text{ 即可。}$$

證法 4 cohomology(Hodge+de Rham)

考慮 $\nabla v = J \nabla u$ 其中 J 是 90° 旋轉

考慮 $\alpha = du$ ，在平面上 $du = u_x dx + u_y dy$

定義它的 Hodge star $*\alpha = -u_y dx + u_x dy$ (在 R^2 標準度量， $*dx=dy$ ， $*dy=-dx$)

在二維中， $\Delta u = d^* du, d^* = -*d*$

$\Delta u = 0 \Leftrightarrow d^* du = 0$ equivalent to $d(*du) = 0$

即 $*\alpha$ 是個 closed form。

因為 Ω 是單連通的 所以 $H_{dR}^1(\Omega) = 0$

$d(*du) = 0 \Rightarrow *du = dv$ for some v

這個定理的本質就是：

在二維中，調和函數 $\Leftrightarrow du$ 的 Hodge dual 是 closed 1-form

單連通 \Rightarrow closed=exact 因此存在 harmonic conjugate。

附錄

1. A holomorphic function $f(z)$:

複可微 (2) 滿足 Cauchy-Riemann 方程

$$\text{即 } f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y) \quad u_x = v_y, u_y = -v_x$$

2. 在 Riemann surface 上，harmonic $\Leftrightarrow du$ 是 co-closed 而 Holomorphic 條件等價於

$du + i^* du$ 是複值 closed 1-form。

3. M 是一光滑流形

$\Omega^k(M)$: M 上的光滑 k -form

$Z^k(M) = \ker d$: closed k -form

$B^k(M) = \text{im } d$: exact k -form

de Rham cohomology : $H_{dR}^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$

De Rham 定理 : $H_{dR}^k \cong H^k(M, \mathbb{R})$

微分形式定義的上同調與奇異上同調（拓撲定義）同構。