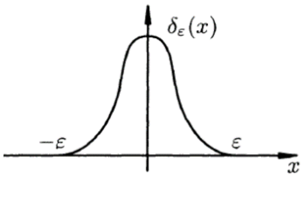
§ Dirac δ-function

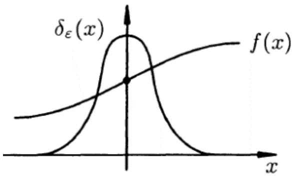
[Lectures of PDE Arnold]

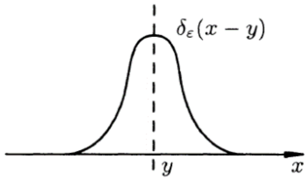


$\delta - shape$ function

1. $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$
2. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int \delta_\varepsilon(x)dx = 1$

$\delta(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$， f(x) is a continuous function





1. $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$
2. $\int f(y)\delta(x-y)dy = f(x)$

Definition

A function is homogeneous of degree d if $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ for any positive λ

[Ex]

證明 $\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$ (因此 $\delta(x)$ 是-1 次齊次式。)

Theorem

Let the continuous function f(x) have support in a bounded domain Ω(即在 Ω 之外，f(x)=0)。

Then there exists a solution of the Poisson equation $\Delta u = f$ given by the formula

$u(x) = \int_\Omega f(y)u_0(x-y)dy$ ，where u_0 is the fundamental solution for the Laplacian。

這定理描述如何透過疊加原理來解決不均勻的 Poisson equation。

簡單來說，這個定理告訴我們：如果你知道「一個點」造成的影響，那麼把「空間中所有的點」產生的影響加總起來，就是整體的結果。

1. f(y)是來源。想像它是在空間 Ω 區域內分布的質量或電荷。
2. $u_0(x-y)$ 這是基本解，代表位於 y 點的單位質量對 x 點產生的影響
3. 積分就是加總的過程。

這個定理把微分問題(解 $\Delta u = f$)轉換成一個積分問題。

這在工程和物理上非常實用，因為只要我們知道基本解 u_0 （這通常是已知的，像在三維空間中一個點電荷在 y 位置，它在 x 產生的電位就是 $u_0(x-y)$ ，在三

維空間中，這通常是我們熟悉的 $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ 。），我們就能透過對來源 f 進行卷積（Convolution）來直接算回答案。

例 假設有一顆半徑為 R 的均勻球體行星，我們想知道行星外的某一點 x 的位能是多少。

1. 這裡 f(y)表示行星的質量密度分布。(假設行星密度為常數 ρ)
2. 在我們生存的三維空間中，拉普拉斯算子的基本解為 $u_0(x-y)=-\frac{1}{4\pi|x-y|}$

定理告訴我們，整顆行星產生的總位能 u(x)是透過以下積分得到的：

$$u(x)=\int_\Omega \rho(-\frac{1}{4\pi|x-y|})dy$$

例 二維平面的散熱問題

想像有一塊無限大的導熱薄板(二維平面)，上面貼了一個正在發熱的微型晶片。

f(y)代表晶片在不同位置的發熱功率密度 。

晶片所佔據的那個小小矩形區域就是 Ω。在晶片範圍之外，沒有熱量產生，所以 f=0。

在二維平面上，拉普拉斯算子的基本解 u_0 是：$u_0(x-y)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$

這意味著在二維世界裡，熱量的「擴散效率」比三維空間差。

在三維空間中，熱量可以往四面八方散去；但在二維平面，熱量被侷限在板子上，導致溫度隨距離的衰減變得比較緩慢（對數級別的衰減）。

定理指出，這塊板子上任何一點 x 的溫度 u(x)，可以透過將晶片每一點產生的熱量進行「對數加權」後積分得到 ：

$$u(x)=\int_\Omega f(y)\cdot\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|dy$$

維度	物理案例	基本解 u_0 的特性
三維 (3D)	星體引力 / 空間電位	$1/r$ (衰減較快)
二維 (2D)	薄板散熱 / 平面電場	$\ln r$ (衰減較慢)

§

熱傳導方程的解法類似，都是利用「基本解（Fundamental Solution）」與「源（Source）」進行疊加。

在偏微分方程理論中，這類方法統稱為 「格林函數法」(Green's Function Method)。

想像在一個無限長的槍管（一維空間）中，在位置 y 的地方瞬間點燃了一個極小的火花（初始溫度分布為 ϕ ）。

熱方程的基本解 $\Phi(x,t)$ 是一個隨時間變化的高斯分佈（鐘形曲線）。
在時間極短時，熱量集中在點火處，曲線又高又尖。
隨著時間流逝，曲線變得又矮又平，代表熱量向四周擴散。
如果你不是只點一個火花，而是有一整段被加熱的區域（初始溫度分布 $\phi(y)$ ），最終的溫度分布 $u(x,t)$ 就是把空間中每一個小點 y 的初始溫度，乘以它擴散到 x 點的「熱核比例」，然後全部加起來：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\Phi(x-y,t)dy$$

特性	帕松方程式 ($\Delta u = f$)	熱傳導方程式 ($u_t = k\Delta u$)
基本解	$u_0(x)$（例如 3D 中的 $1/r$）	$\Phi(x,t)$（稱為**熱核 Heat Kernel**）
物理意義	一個「點電荷」或「點質量」的影響	一個「點熱源」在瞬間釋放熱量後的擴散
解的構造	$u = f * u_0$（空間上的加總）	$u =$ 初始溫度 $* \Phi$（空間上的演化）