Let $u(x,t)$ satisfy $u_{tt} = \Delta u$ in $R^3 \times R$ and $U(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{|y-x|=r} u(y,t)d\sigma(y)$ be the average of u over $\partial B(x,r)$(球面)。Prove that

(a) $U_{rr} + \frac{2}{r}U_r = U_{tt}$

(b) $\sum_{i=1}^{3} U_{x_i x_i} = U_{tt}$

(c) $E(t) = \int_{R^3}\int_0^\infty [U_r^2 + \sum_{i=1}^{3} U_{x_i}^2 + 2U_t^2]r^2 drdx$ is independent of t if u(x,0) has compact support。

(a) $U_t = U_{rr} + \frac{2}{r}U_r$

$u_{tt} = \Delta u$ 表示是一個波動方程，$U(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS$ 作為 u 在球面的平均值。

Laplace 算子在球座標中的表示為 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} u$，其中 Δ_{S^2} 是單位球面上的 Laplace-Beltrami 算子。

- 取球面平均後，利用球面平均的性質可得：

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} \Delta u \, dS = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) dS$$

- 根據球面平均公式，$U(x,r,t)$ 的徑向導數滿足：

$$U_r = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_r \, dS$$

$$U_{rr} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u_{rr} \, dS$$

- 對球面上的拉普拉斯-貝爾特拉米算子進行積分，使用球面平均的性質，我們有：

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} u \, dS = 0$$

因為球面平均會消去角度變化的部分。

- 由於 u 滿足 $u_{tt} = \Delta u$，我們取球面平均得到：

$$U_{tt} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u \, dS$$

- 代入拉普拉斯算子在球坐標的形式，並去掉球面上的角度變化部分：

$$U_{tt} = U_{rr} + \frac{2}{r} U_r$$

U(x,r,t)仍然滿足相同形式的波動方程。

1. Defined the spherical average：$U(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u(y,t) d\sigma(y)$
2. Differentiate U twice w.r.t. time：$U_{tt} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u_{tt}(y,t) d\sigma(y)$
3. Apply the wave equation：$u_{tt} = \Delta u$ ，$U_{tt} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} \Delta u(y,t) d\sigma(y)$
4. In 3D，for a spherical average，the integral of the Laplacian over a sphere relates to the radial derivatives of U：$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} \Delta u d\sigma = U_{rr} + \frac{2}{r} U_r$

$U_{tt} = U_{rr} + \frac{2}{r} U_r$