§ transport equation 傳輸方程

$u_t + cu_x = 0$ ...(1)

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = f(x), x \in R \end{cases} \quad ...(2)$$

1. The general solution of (1) is $u(t,x) = \phi(x-ct)$
2. The particular solution of (2) is $u(t,x) = f(x-ct)$

Here are some forms of the transport equation in increasing order of complexity:

- $u_t + cu_x = 0$, where $u = u(x,t)$ and c is a constant;
- $\rho_t + q_x = 0$, where ρ and q depend on x and t;
- $u_t + \vec{c} \cdot \nabla u = 0$, where $u = u(x,y,z,t)$ and $\vec{c}$ is a constant vector.
- $u_t + \vec{c} \cdot \nabla u = f(x,y,z,t)$.

解 $u_t + cu_x = 0$ 線性、齊次 一階偏微分方程

1. 物理的觀點 相對運動之座標系

x 表示一物體在固定座標系的位置，令 $\xi = x - ct$ 表示此物體相對於一以 c 等速運動的觀察者的位置。

把(t,x)改成用 (t,ξ) 表示對於觀察者的參考座標系 則 $u(t,x) = v(t, x-ct) = v(t,\xi)$

由連鎖律

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad 因此$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

表示 v 與 t 無關，得 $v(t,\xi) = \phi(\xi)$ 即 $u(t,x) = \phi(x-ct)$

[Introduction to Partial Differential Equations] Peter J. Olver p.20

2. 幾何的觀點 特徵線法(method of characteristics)

把原方程寫成 $0 = u_t + cu_x = (1,c)\cdot(u_t, u_x)$

即方向導數 $D_{(1,c)}u = 0$ ，這表示每一個解 u 在(1,c)方向的切線是一常數 u=c

此切線斜率為 c，即 $\frac{dx}{dt}=c$ ，x=ct+k，其中 k 是常數

重寫成 x-ct=k，沿這些線 u 是常數 表示 u 只跟 x-ct 有關 因此寫成 $u=\phi(x-ct)$

[Partial Differential Equations] Christopher C. Tisdell p.12

3. 方程式的推導

考慮水流過一有固定截面的細管，往 x 軸正向流動，水流中鹽(或其他)在 x 位置、 t 時間的濃度(或者密度)為 $u(t,x)$ g/cm(且是一保守系)

水流固定速度 c

在一固定時間 t_0 ，區間[a,b]內鹽的質量為 $\int_a^b u(t_0,x)dx$

在時間 t_0+h 鹽向右移動 ch(cm)，所以 $\int_{a+ch}^{b+ch} u(t_0+h,x)dx=\int_a^b u(t_0,x)dx\cdots(*)$

兩邊對 b 微分，由微積分基本定理 得 $u(t_0+h,b+ch)=u(t_0,b)$

(*)兩邊對 h 微分，由連鎖律得 $cu_x(t_0+h,b+ch)+u_t(t_0+h,b+ch)=0$

$h\to 0$ $u_t(t_0,b)+cu_x(t_0,b)=0$ 因為 t_0,b 是任意的 所以有 $u_t+cu_x=0$

意思是說濃度(密度)的變化率與 u 的梯度(gradient 1-dim)成比例。

[Partial Differential Equations] Christopher C. Tisdell p.14

Solve:

a) $u_t+2u_x=0$;

b) $2u_t-u_x=0$;

c) $u_t+5u_x=0,\quad u(x,0)=e^x$.

1. $u_t+2u_x=0, u(0,x)=\frac{1}{1+x^2}$ $u(t,x)=\frac{1}{1+(x-2t)^2}$

Let $\xi=x-2t$ $u(t,x)=v(t,\xi)=v(t,x-2t)$

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}-2\frac{\partial v}{\partial \xi}$ ， $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}$ $\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}=0$

$u(t,x)=v(t,\xi)=f(\xi)=f(x-2t)$

$v(t,\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{1}{1+(x-2t)^2}$

2. $2u_t-u_x=0$

$u(t,x)=f(x+\frac{1}{2}t)$ or $g(2x+t)$

3. $u_t + 5u_x = 0, u(0,x) = e^x$

$u(t,x) = e^{x-5t}$