§ 黎曼流形上的熱核 [PDE001]

§

(M,g)是連通、完備的黎曼流形 熱核 p(t,x,y) t>0 $x,y\in M$

1. $(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x)p(t,x,y)=0$

   ∇_x是關於 x 的 Laplace-Beltrami 算子；$\Delta_g=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j)$

2. 初始條件(在分布意義下) $\lim_{t\to 0^+}p(t,x,\bullet)=\delta_x(\bullet)$

3. p(t,x,y)=p(t,y,x)

4. 半群性質

   $p(t+s,x,y)=\int_M p(t,x,y)p(s,x,y)dV(z)$ ，dV 是 volume form

§ 譜幾何

若 M 是 compact，Laplace 算子有離散譜$\{\lambda_i\}$ (對應特徵函數ϕ_i)

熱核可展開為 $p(t,x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda_j t}\phi_j(x)\phi_j(y)$ ：

在緊緻流形上，熱核可以由$L^2(M)$的完備正交特徵基底展開，且收斂性良好。

熱跡(trace) $Z(t)=\int_M p(t,x,x)dV(x)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda_j t}$

§ 解讀熱核公式：

特徵函數展開：由於Δ是自伴的，根據譜定理，存在一組完備的正交歸一的特徵函數基底$\{\varphi_j\}$，以及對應的非負特徵值使得$\Delta\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$。就像將一個振動分解成基本頻率一樣。

p(t,x,y)可以被理解為在 t=0 時，在 y 點注入一個單位的熱量(一個 Diracδ函數)，經過時間 t 後，在 x 點觀察到的溫度分布。

公式中的$e^{-\lambda_j t}$項表示高頻率(大的特徵值λ_j)的振動模式會隨著時間快速衰減。

重要定理：

1. 熱核的存在性與唯一性
2. 熱核的漸近展開
3. 熱核與譜(跡)的關係

   對熱核的時空跡進行積分：$Z(t)=\int_M tr(p(t,x,x))dx=\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j t}$ (稱為熱跡)。

   (1) 當$t\to 0^+$，利用漸近展開我們可以得到流形的全局幾何不變量，例如總

體積、總純量曲率…

(2) 當 $t \to \infty$ ，主導項是 $e^{-\lambda_1 t}$ ，這給出了算子的最小特徵值 λ_1 的資訊。

(3) 熱跡包含了算子的所有資訊，「熱核聽到了譜的形狀」
利用熱跡的漸近行為可以推導出 Weyl 定律，它描述了特徵值的分布情況

$$N(\lambda) \sim \frac{\omega_n Vol(M)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}} \text{ as } \lambda \to \infty$$

其中 $N(\lambda)$ 是小於 λ 的特徵值的個數，這說明了特徵值的增長速率僅由流形的維度和體積決定。

Varadhan 恆等式 $\lim_{t \to 0} -4t \log \mathrm{K}(t,x,y) = d(x,y)^2$ ，d(x,y)是黎曼距離。

§ 應用

1. 幾何流；在 Ricci 流中，熱核用於推導曲率估計。
2. 證明 Atiyah-Singer 指標定理。
3. 推導 Sobolev 不等式，Harnack 不等式…
4. 拓撲不變量
5. 根據 Feyman-Kac 公式，黎曼流形上的熱核 K(t,x,y)可是為布朗運動中，從 x 出發的布朗運動在時間 t 時到達 y 附近的機率密度。

§ 例

1. R 上的熱核

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} \quad H(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$$

(1) $\int_R H(t,x,y)dy = 1$

(2) $\int_R (y-x)^2 H(t,x,y)dy = 2t$

在 R^n 上， $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ，熱核 $p(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t}), t > 0$

則 $e^{t\Delta}$ 作用在函數 f 上為卷積： $(e^{t\Delta} f)(x) = \int_{R^n} p(t,x,y) f(y)dy$

2. S^1 上的熱核

Q：t=0 時，將一單位熱量集中於 S^1 上一點 $\theta_0 = 0$ ，問 t>0 時 熱量如何在 S^1 上分佈？

$S^1 = R/2\pi Z$ ， $\Delta = \dfrac{d^2}{d\theta^2}$

(1) 特徵值 $\lambda_k = -k^2 \quad \phi_k(\theta) = e^{ik\theta}$

(2) $H(t,\theta,\phi) = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z} e^{-k^2 t} e^{ik(\theta-\phi)}$ (週期化)等價表示

$$H(t,\theta,\phi) = \sum_{n\in Z} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(\theta-\phi+2\pi n)^2}{4t}\right)$$

$Tr = \int_0^{2\pi} H(t,\theta,\theta)d\theta = \sum_{k\in Z} e^{-k^2 t} \Rightarrow \lambda_k = k^2$

熱方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ with initial condition $u(0,\theta) = \delta(\theta)$

解 $u(t,\theta)$ 就是熱核 $p(t,0,\theta)$

解一

$$p_R(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

$S^1 \cong R/2\pi Z$ ， $p_{S^1}(t,0,\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\theta-2n\pi)^2}{4t}}$

解二

$\Delta = \dfrac{d^2}{d\theta^2}$ ， $-\Delta\phi = \lambda\phi$ with $\phi(\theta+2\pi) = \phi(\theta)$

解得 $\lambda_k = k^2, k = 0,1,2,\ldots$

$$p(t,0,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\phi_k(0)\varphi_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\cos(k\theta)$$

熱核為特徵展開：

$H(t,\theta,\phi) = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z} e^{-k^2 t} e^{ik(\theta-\phi)}$ 這是一個週期化高斯核，在 $t \to 0$ 時集中到 $\theta = \phi$

函數 f 展開為傅立葉級數 $f(\theta) = \sum_{n\in Z} c_n e^{in\theta}$

由於 $\Delta e^{in\theta} = -n^2 e^{in\theta}$ 則 $e^{t\Delta} e^{in\theta} = e^{-n^2 t} e^{in\theta}$

因此熱半群作用為（$(e^{t\Delta} f)(\theta) = \sum_{n\in Z} c_n e^{-n^2 t} e^{in\theta}$

直接計算 S^1 的譜：

得到特徵值$\lambda_k = k^2, k = 1,1,2,...$特徵函數$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \{\cos\frac{k\theta}{\sqrt{\pi}}, \sin\frac{k\theta}{\sqrt{\pi}}\}$

是靜態列表。

透過熱核分析：

得到動態過程與時間演化

定義熱跡$Z(t) = \int_{S^1} p(t,\theta,\theta)d\theta = \sum e^{-\lambda_k t}$是譜的生成函數，在$t \to 0^+$實有漸近展開

$$Z(t) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...)$$

a_0是流形的體積，對S^1是2π。$a_1(x) = \frac{1}{6}S(x)$，其中 S(x)是標量曲率，對S^1 =0 因為平坦。

$a_2(x)$包含的資訊⋯

3. 區間[0,L] (Dirichlet 邊界)

   設定$\Delta = \frac{d}{dx^2}$ u(0)=u(L)=0

   特徵值 $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2$ $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$

   熱核 $H(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi/L)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{L}$

   $\lim_{t\to\infty} H(t,x,y) = 0$

   取跡 $Tr = \int_0^L H(t,x,x) = ... = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi/L)^2 t} \Rightarrow \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$

4. 平坦環面$T^2 = S^1 \times S^1$

   設定$(x,y) \in [0,2\pi]^2$

   特徵值 $\lambda_{m,n} = -(m^2 + n^2)$

   熱核 $H(t,(x,y),(x',y')) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{m,n\in Z} e^{-(m^2+n^2)}e^{im(x-x')}e^{in(y-y')}$

   $Tr = \sum_{m,n\in Z} e^{-(m^2+n^2)t} \Rightarrow \lambda_{m,n} = m^2 + n^2$

5. 球面S^2

   設定 Δ_{S^2} ，特徵值(球諧函數) $\lambda_l = -l(l+1), \dim = 2l+1$

熱核(僅依賴測地距離γ) $H(t,\gamma)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{-l(l+1)t}\frac{1}{4\pi}P_l(\cos\gamma)$

P_l是 Lagendre 多項式

$Tr=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{-l(l+1)t}\Rightarrow\lambda_l=l(l+1)$

空間	方法	熱核特色
$\mathbb{R}^n$	高斯	基本模型
S^1	傅立葉	週期疊加
$[0,L]$	正弦級數	邊界效應
T^n	分離變數	譜幾何
S^2	球諧	曲率出現

核心原理

若$\Delta\phi_k=-\lambda_k\phi_k, k\geq 0$ 則熱核展開$H(t,x,y)=\sum_k e^{-\lambda_k t}\phi_k(x)\phi_k(y)$

$Tr(e^{t\Delta})=\int_M H(t,x,x)d\mu=\sum_k e^{-\lambda_k t}$

§ 習作

1. 在R^n上，考慮 Laplace 算子$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ，證明熱方程$(\partial_t-\Delta)u=0$的基本解

   $H(t,x,y)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})$

   (1) 直接對 H(t,x,y)計算$\partial_t H,\Delta_x H$ ，可以驗證$\partial_t H=\Delta_x H$

   (2) 初始值為 Dirac delta

   對任意測試函數φ ，$\lim_{t\to 0^+}\int_{R^n}H(t,x,y)\varphi(y)dy=\varphi(x)$ ，即$H(t,x,y)\to\delta_x(y)$

   因此 H 為熱核。

2. 設(M,g)為緊緻黎曼流形，H(t,x,y)為 Laplae-Beltrami 算子Δ的熱核，證明 H(t,x,y)=H(t,y,x)

   Laplace-Beltrami 算子是自伴算子，$\int_M(\Delta f)g=\int_M f(\Delta g)$ ，因此其熱半群$e^{t\Delta}$也

是自伴的。對任意 f，$(e^{t\Delta}f)(x)=\int_M H(t,x,y)f(y)d\mu(y)\cdots$

3. 證明在緊緻流形上，$\int_M H(t,x,y)d\mu(y)=1$

4. 設 M 為緊緻 n 維黎曼流形，$Z(t)=\int_M K(t,x,x)dV(x)$ 為熱跡，根據 Weyl 定律，當 $t\to 0^+$ 時，Z(t)的主導項與流形的哪一個幾何量成正比？

   $(4\pi t)^{-n/2}Vol(M)$

5. 在三維雙曲空間 H^3 (曲率為-1)中，若設 r=d(x,y)，熱核的形式為何？

   $K(t,x,y)=\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\frac{r}{\sinh r}e^{-t-\frac{r^2}{4t}}$

6. 對於二維緊緻無界流形，熱跡展開式為 $Z(t)\sim\frac{1}{4\pi t}(a_0+a_1t+a_2t^2+...)$

   $\int_M a_1(x)dV(x)$ 與流形的拓撲量有何關係？ $\int_M a_1(x)dV(x)=\frac{1}{3}\pi\chi\quad(M$

   $a_1(x)=\frac{1}{6}S(x)$ 由 Gauss-Bonnet 定理 $\int_M SdV=4\pi\chi(M)$

7. 在單位圓 S^1 上(周長為 L)，熱核可以表示為 R 上熱核週期化求和。當 $t\to 0$ 時，此求和主要由歐幾里得核項主導；當 $t\to\infty$ 時，熱核趨向於甚麼？ $\frac{1}{L}$

8. 熱核的 Mellin 變換與流形的 Zeta 函數 $\varsigma(s)=\sum\lambda_j^{-s}$ 有密切關係…

   $\varsigma(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty (Z(t)-1)t^{s-1}dt$

§ $e^{t\Delta}$ 的定義

若 Δ 在 $L^2(M)$ 上是自伴且負定的，則由譜定理 對於平方可積函數 f：

$e^{t\Delta}f=\int_{\sigma(\Delta)}e^{t\lambda}dE_\lambda f$ 其中 $\{E_\lambda\}$ 是 Δ 的譜測度。

$(e^{t\Delta}f)(x)=\int_M p(t,x,y)f(y)dy$ 熱核與 f 的卷積

例

1. 在 R 上，取 $f(x)=e^{-x^2}$ 計算 $u(t,x)=(e^{t\Delta}f)(x)$

   $$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4t)}\cdot e^{-y^2}dy$$

   這裡有卷積計算⋯

   $$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp(-\frac{x^2}{1+4t})$$

   驗算 t=0 時 $u(0,x)=e^{-x^2}$ 且滿足 $\partial_t u=\partial_x^2 u$

2. 在圓周 S^1 的熱半群 取 $f(\theta)=\cos\theta$

   略

3. 在 S^2 上計算熱半群 $e^{t\Delta}$

設 S^2 配備標準半徑 1 的度量，其 Laplace–Beltrami 算子（負定）在球坐標 (θ,ϕ) 中為：

$$\Delta_{S^2}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

其特徵函數為 **球諧函數** $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$，滿足：

$$\Delta_{S^2}Y_{\ell m}=-\ell(\ell+1)\,Y_{\ell m},\quad \ell=0,1,2,\ldots,\ m=-\ell,\ldots,\ell.$$

熱半群的作用

對於任意函數 $f\in L^2(S^2)$，可展開為：

$$f(\theta,\phi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}c_{\ell m}\,Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

其中

$$c_{\ell m}=\int_{S^2}f\,\overline{Y_{\ell m}}\,d\Omega.$$

熱方程 $\partial_t u=\Delta_{S^2}u$（這裡 Δ 取幾何慣例，譜非正，即 $\Delta=\nabla^2$ 為正 Laplace–Beltrami 的負）的形式解為：

$$u(t,\theta,\phi)=e^{t\Delta_{S^2}}f=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}c_{\ell m}\,e^{-\ell(\ell+1)t}\,Y_{\ell m}(\theta,\phi).$$

注意指數中是 $-\ell(\ell+1)t$（因為 $\Delta Y_{\ell m}=-\ell(\ell+1)Y_{\ell m}$，所以 $e^{t\Delta}Y_{\ell m}=e^{-\ell(\ell+1)t}Y_{\ell m}$）。

熱核的顯式表達

熱核 $p(t,x,y)$ 是滿足 $e^{t\Delta}f(x)=\int_{S^2}p(t,x,y)f(y)\,d\Omega(y)$ 的積分核。
在 S^2 上，由於齊性與各向同性，$p(t,x,y)$ 只與兩點間的測地距離 $d(x,y)=\gamma$ 有關，其中 $\cos\gamma=x\cdot y$。

利用球諧函數加法定理：

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell m}(x)\overline{Y_{\ell m}(y)}=\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\cos\gamma),$$

其中 P_ℓ 是 Legendre 多項式。

其中 P_ℓ 是 Legendre 多項式。

因此：

$$p(t,x,y)=\sum_{\ell=0}^{\infty}e^{-\ell(\ell+1)t}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell m}(x)\overline{Y_{\ell m}(y)}=\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{-\ell(\ell+1)t}P_\ell(\cos\gamma).$$

這就是 S^2 上熱核的閉合形式（級數表示）。

計算實例

例 1 初始溫度集中在北極

取初始函數為 $f(x)=\delta(x-N)$（北極點 $\theta=0$），則係數：

$$c_{\ell m}=\overline{Y_{\ell m}(N)}=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\delta_{m0},$$

因為 $Y_{\ell m}(\theta=0,\phi)$ 只在 $m=0$ 非零，且 $Y_{\ell 0}(0,\phi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$。

於是：

$$u(t,\theta,\phi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}e^{-\ell(\ell+1)t}Y_{\ell 0}(\theta,\phi).$$

由於 $Y_{\ell 0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$，得：

$$u(t,\theta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{-\ell(\ell+1)t}P_\ell(\cos\theta),$$

這正是上面熱核 $p(t,N,(\theta,\phi))$。

例 2 初始溫度為帶諧函數 Y_{10}

取 $f(\theta,\phi)=Y_{10}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$，則 $c_{10}=1$，其餘為 0。

所以：

$$(e^{t\Delta}f)(\theta,\phi)=e^{-1\cdot 2\cdot t}Y_{10}(\theta,\phi)=e^{-2t}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta.$$

直接驗證：

$\partial_t u=-2e^{-2t}Y_{10}$，

$\Delta u=(-2)e^{-2t}Y_{10}$，相等，滿足熱方程。