關於調和函數的故事

§ 01 單位圓盤上的 Dirichlet 問題

$f:\partial\Omega \to R$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 \le x^2 + y^2 < 1$

u(x,y)=f(x,y) $\qquad x^2 + y^2 = 1$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ 稱為 Laplace equation

$u:\Omega \subset R^n \to R$ (or C) 滿足 Δu=0 則 u 稱為 harmoic function。

(subharmonic $\Leftrightarrow \Delta u \ge 0$)

$\Delta u = f$ with a given function f is called Poisson equation。

§ [PDE701Harmonic] p.12

Polar coordinates (r,θ) ： $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, 0 \le r < 1 \\ \quad u(1,\theta) = f(\theta), 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$u(r,\theta + 2\pi) = u(r,\theta) \quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$

變數分離 let $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 得到 $\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \Theta(0) = \Theta(2\pi), 0 \le \theta \le 2\pi$

稱為 Sturm-Liouville problem。

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2, n = 0,1,2,3,... \\ \Theta_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0 \\ \Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, n = 1,2,3,... \end{cases}$$

$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n, 0 \le r < 1$ 是 Fourier series

其中 a_0, a_n, b_n 由邊界值 $f(\theta)$ 決定

$u(1,\theta) = f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \cdots (*)$

(*)兩邊分別同乘 $\cos n\theta, \sin n\theta$ 再積分

…

最後得到 Poisson formula：

$$u(r,\theta) = (a^2 - r^2) \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2} \frac{d\phi}{2\pi}.$$

§ Poisson kernel

$$P(r,\theta) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$$

定理：

圓盤的 Dirichlet 問題的解可以表示為

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)P(r,\theta-\varphi)d\varphi \quad \text{其中} 0 \le r < 1$$

1. 近似 Delta 函數：當 $r \to 1^-$（即從圓盤內部靠近邊界）時，$p_r(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 附近形成一個越來越高的尖峰，且其積分為 1。這意味著，當你越靠近邊界，內部點的值就越接近該點正上方的邊界值。
2. 調和性：對固定的 r 和 θ，$p_r(\theta)$ 作為圓盤內部的函數是調和的。
3. 平均性質：它完美地將邊界值加權平均，得到內部的光滑調和函數。

這裡有一個 Fourier 級數的收斂問題，換句話說是 Poisson 收斂定理(用到 Dirac-δ 函數)。

特徵	**熱核**	**Poisson 核**
對應方程	熱方程 $u_t = \Delta u$（拋物型）	拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$（橢圓型）
問題類型	初值問題（給定時間 $t = 0$ 的分佈）	邊值問題（給定邊界 $\partial\Omega$ 的值）
物理意義	熱量隨時間的擴散	靜電勢或平衡狀態的傳播
傳播速度	無限速度（但衰減極快）	全域影響，無時間變數
表達式範例	$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$	$\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$

Poisson 核是一個積分核，它透過對邊界值進行加權平均，來構造區域內部的調和函數（拉普拉斯方程的解）。

在單位圓盤的情況下，它的表達式是 $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$

定理

Poisson kernel 是單位圓映至單位圓的 Mobius 變換的 Jacobian。

§ Green identities 與 **Green function**

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = \delta(x,y), (x,y) \in B_2(1)$$

$v(x,y)=0 \quad \text{on} \quad \partial B_2(1)$

則稱 v(x,y)為單位圓盤 Dirichlet 問題的 Green 函數。

§ Harnack 不等式與 Harnack 定理

假設 u 是定義在 n 維歐幾里得空間中一個球體 $B_R(x_0)$ 上的非負調和函數（即滿足 $\Delta u = 0$ 且 $u \ge 0$ ）。

對於該球體內部任何一個較小的閉球 $B_r(x_0)$（其中 r<R），存在一個只與 n，r，R 有關的常數 C，使得對於球體內的任意兩點 x 與 y，皆滿足：$u(x) \le Cu(y)$

這意味著 $\sup_{B_r} \le C \inf_{B_r} u$ 。

有幾個重要推論：

1. Strong Maximum Principle：如果一個非負調和函數在區域內某一點為零，那麼它在整個連通區域內都必須恆等於零。
2. Liouville 定理：如果一個調和函數在整個 R^n 上是有界的（或者只是單邊有界，例如恆正），那麼它一定是一個常數。
3. 收斂性(Harnack 定理)：一串單調遞增的調和函數，如果要麼在某一點收斂，要麼就會在整個區域內一致收斂到一個調和函數。
4. 連續性與正則性：它是證明偏微分方程解的 Hölder 連續性 的核心步驟。

§ 在幾何流的領域，Harnack 不等式從原本「函數值的比例限制」演變成了一種極為強大的微分形式（Differential Harnack Inequalities）。

這方面的突破主要歸功於 Peter Li (李偉光)與丘成桐，以及後來將其應用在 Ricci Flow 中的 Richard Hamilton。

在幾何流中，我們關心的不再只是函數本身，而是曲率隨時間演化的規律。

§ Li-Yau 梯度估計：

幾何流本質上是某種廣義的熱傳導方程。Li 和丘成桐在 1986 年證明了，對於流形上熱方程的任何正解 u(x,t)，滿足以下微分不等式：

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha \frac{u_t}{u} \le \frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)}$$

。其中 K 與流形的底空間曲率有關。

這是在限制函數的梯度與時間變化率之間的關係。當你沿著流形上的路徑積分這個微分不等式時，就會得到經典形式的 Harnack 不等式（即比較兩個不同時空點的函數值）。

§ Hamilton 的 Ricci flow Harnack 不等式：

對於一個具有正曲率（更精確地說，是算子 $R_m \geq 0$ ）的維度為 n 的流形，

Hamilton 證明了對於任何向量場 V，其曲率滿足一個複雜的二階微分不等式。最簡單的痕跡形式（Trace version）如下：

$$\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{R}{t}+2\left\langle \nabla R,V\right\rangle +2Ric(V,V)\geq 0$$

它告訴我們：在瑞奇流下，如果曲率一開始是正的，它演化的方式會受到嚴格的時空約束，不會亂跳。

Hamilton 的 Harnack 不等式是 Perelman (佩雷爾曼) 後來證明 Poincaré Conjecture 的重要啟發。Perelman 發展出的「W-熵」單調性，本質上可以看作是一種全球化（Global）的 Harnack 形式。

後記：

從單位圓盤的 Dirichlet 問題到 harmonic function 理論，我問 DeepSeek：harmonic analysis 與 geometric harmonic analysis 處理甚麼問題？

調和分析是研究函數在平直空間的頻譜分解，幾何調和分析則推到流形上。

一個具體的例子是：視覺皮層的李群模型(Models of the Visual Cortex in Lie group SE(2))。(李群上的 Fourier 分析。)

也許哪一天能對機器人的視覺有更多的理解。