Given the Poisson formula in half-plane

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(z)}{(x-z)^2+y^2}dz, x\in R, y>0$$ ，with $g\in C(R)\cap L^{\infty}(R)$

Given $x_0\in R$ ，show that $u(x_0,y)\to g(x_0)$ as $y\to 0^{+}$

證明

$$P_y(x-z)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-z)^2+y^2}$$ ， $$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-z)^2+y^2}dz\overset{w=\frac{z-x}{y}}{=}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{w^2+1}dw=1$$

則 $g(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}P_y(x_0-z)g(x_0)dz$

$$\left|u(x_0,y)-g(x_0)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}P_y(x_0-z)[g(z)-g(x_0)]dz\right|\to 0 \quad \text{as} \quad y\to 0^{+}$$

後面有細膩的證明 暫略。

[註] [PDE701-4]

Poisson kernel $P(r,\theta)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$

上半平面 H (ξ,η)

$u(\xi,\eta)=\dfrac{\eta}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt$ 作 $\omega=\xi+i\eta, z=re^{i\theta}$ 則這個 Poisson 積分公式 $u(\xi,\eta)$ 就是 Poisson kernel。

上半平面的 Dirichlet 問題經過一個 conformal mapping 回到單位圓盤。