

§ The Schrodinger equation

[Spec701-1] $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$, Hamiltonian operator $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ where V is the potential energy . Ψ is the wave function .

General solution $\Psi(r, t) = \sum_n c_n \psi_n(r) e^{-iE_n t/\hbar}$

與時間無關的 Schrodinger 方程為 $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi$

KdV 方程描述一維淺水波的非線性演化： $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ 。其解 $u(x, t)$ 可透過

IST 轉化為時間依賴的薛丁格算子 $-\partial_x^2 + u(x, t)$ 的散射數據 。這些數據決定位勢 $u(x, t)$ ，而連續譜與離散譜（bound states ，對應孤子）捕捉了非線性效應。

1967 年 Gardner Martin 、John Greene 、Martin Kruskal 、Robert Miura 發現 KdV 可以透過一個線性譜問題描述。

這個譜問題是 Schrodinger 方程 $-\psi'' + u(x, t)\psi = \lambda\psi$ ($u(x, t)$ 變成 potential)

...

名詞解釋：

1. 色散(dispersion)

如果一個方程的相速度依賴於頻率或波數，就稱為色散方程。

例 KdV 方程 $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ 線性化後色散關係為 $\omega = k^3, v_p = k^2$ (相速度

依賴 k) 是色散方程。($v_p = \frac{\omega}{k}$)

Schrodinger 方程 $iu_t + \Delta u = 0$ 平面波 $u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ 代入， $\omega = |k|^2$

因此 $v_p = |k|$ 不同頻率速度不同 → 色散

若相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}$ 與 k 無關則為非色散方程。

也就是所有波長、傳播速度相同，波形保持不變。

例如 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $u = e^{i(kx - \omega t)}$ $\omega^2 = c^2 k^2, v_p = \frac{\omega}{k} = c$ 是常數，是非色散方程。

2. 散射數據

描述波在與介質或勢能相互作用後，最終在無限遠處呈現的全部資訊的一組數據。

把一個複雜的微分方程解，轉換成一組比較簡單的“頻譜資料”。

例 一維的 Schrodinger 方程 $-\psi'' + q(x)\psi = k^2\psi$

其中 $q(x)$ 是 potential， k 是波數

散射理論把 potential $q(x)$ 轉換成以下資料

- (1) 反射係數 $R(k)$
 - (2) 穿透係數 $T(k)$
 - (3) 束縛能本徵值 k_1, k_2, \dots, k_N
 - (4) Normalization constant c_1, c_2, \dots, c_N
- 因此散射數據 $S = \{R(k), k_n, c_n\}$

3. IST(Inverse Scattering Transform)

§

KdV flow 等價於 Schrodinger operator 的等譜變形(isospectral deformation)

亦即 $\partial_t L = [B, L]$ 是 Peter Lax 的 Lax pair

是 spectral geometry 與可積系統의 交會點。

- (1) KdV 方程是個非線性 PDE，表面上看起來完全不像譜理論問題。
- (2) 引入 Schrodinger 算子

$L = -\partial_x^2 + u(x, t)$ 考慮其譜問題 $L\psi = \lambda\psi$ 即

$-\psi'' + u(x, t) = \lambda\psi$ (注意 potential= $u(x, t)$, 但 u 會隨時間變化)

- (3) Lax 發現，如果 $u(x, t)$ 滿足 KdV 則存在另一個算子 B

$B = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x$ 使得 $\partial_t L = [B, L]$

- (4) $L\psi = \lambda\psi$ 對時間微分並利用 Lax equation $\partial_t L = [B, L]$ 可以證明 $\partial_t \lambda = 0$
Schrodinger 算子的譜不隨時間改變，這稱為 isospectral deformation。
- (5) KdV 的時間演化 $u(x, t)$ 在改變 potential，但同時 $L = -\partial_x^2 + u(x, t)$ 的譜保持不變，就像樂器形狀變形但音階不變。
- (6) 散射數據其實是 Schrödinger operator 的譜資料，包括連續譜 (reflection coefficient) 離散譜 (bound states)
由於 KdV 是 isospectral flow，所以 eigenvalues 不變，只有 phase 在變。
因此散射數據演化非常簡單： $R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3t}$ ，這正是 Inverse Scattering Transform 成功的原因。
- (7) 無限守恆量
等譜還有重要結果。因為 $\text{Spec}(L)$ 不變，所有 $\text{Tr}(L^n)$ 都是守恆量，無限多守恆率就是可積系統的特徵。

§ KdV 的 periodic 解對應一條代數曲線(spectral curve)

也就是 $\det(L - \lambda) = 0$

這會把 KdV 與 Riemann surfaces、theta functions、finite-gap integration

全部連在一起。

很多譜幾何與 integrable system 的研究其實都是從這裡長出來的。