§ 人造衛星的軌道方程

華羅庚 微積分(下) p.313

從地球表面上一點 P 依水平角 α，速度 v_0 射出質量為 m 的物體(看做一個質點)。地球質量 $M=5.98\times10^{27}$ 克。求此物體的運動軌道

物體的座標(x，y)，引力 $\dfrac{fmM}{x^2+y^2}$，其中 $f=6.673\times10^{-23}km^3/g\sec^2$ 是引力常數

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \text{...(*)}$$ 這是人造衛星的運動方程

由(*)知 $\dfrac{d}{dt}(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt})=x\dfrac{d^2y}{dt^2}-y\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$

$$\frac{d}{dt}[(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2]=2(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2})=-\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt})=\frac{-fM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d(x^2+y^2)}{dt}$$

$\because (xy'-yx')'=xy''-yx''$ 上兩式積分得

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1$$

$$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+c_2$$

換成極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$dx=dr\cdot\cos\theta-r\sin\theta d\theta$

$dy=dr\cdot\sin\theta+r\cos\theta d\theta$

上兩式變成 $r^2\dfrac{d\theta}{dt}=c_1,(\dfrac{dr}{dt})^2+r^2(\dfrac{d\theta}{dt})^2=\dfrac{2fM}{r}+c_2$

消去 $\dfrac{d\theta}{dt}$ 得...

令 $p=\dfrac{c_1^2}{fM},e=\sqrt{1+\dfrac{c_2c_1^2}{(fM)^2}}$ (離心率) 得出軌道方程 $r=\dfrac{p}{1+e\cos(\theta-c)}$

p.316

算出第一宇宙速度 $v_0=7.9km/\sec$，第二宇宙速度 $v_0=11.2km/\sec$

第一宇宙速度 $v_0=\sqrt{\dfrac{fM}{R}}$，R=6370km

即出速度在 $7.9<v_0<11.2$，沿水平方向發射，可以得到橢圓軌道。

在[Escape velocity]中離地面 ykm 向上垂直發射 得脫離速度$v_e = \sqrt{\dfrac{2gR^2}{y+R}}$是宇宙

第二速度 11.2km/sec