散度定理/黎曼幾何筆記

散度定理/黎曼幾何筆記

「梯度、旋度、散度。」向量微積分中從靜電場出發到馬克士威爾的電磁學，這是物理層面。數學方面則統合為 Stokes 定理 $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$ 。

古典的向量場理論則從 Green 定理，Stokes 定理到高斯定理(散度定理)是微分幾何的基礎工作，當然，微分形式(differential forms)與之相輔相成。
這裡僅就散度定理(divergence theorem)方面，個人學習黎曼幾何的經驗與大家分享。

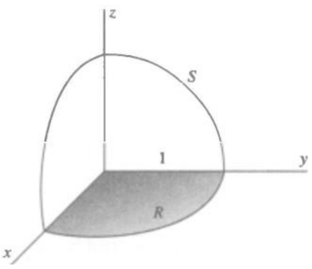
§ 01　R^n 中的散度定理寫成這樣 $\int_{\Omega} (\nabla \bullet F) dV = \int_{\partial\Omega} F \bullet ndS$

(1)在 R^3 中的(1)向量形式為 $\iint\limits_S E \bullet ndS = \iiint\limits_V divEdV$

(2) differential forms 的形式：
Ω 是 R^3 中的有界區域，$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

則 $d\omega = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz$ 稱為 divergence。

舉一例：



S：球心在原點，半徑=1 的 $\frac{1}{8}$ 球面，求 $\iint\limits_S z^2 dS =$

$$X(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$X_x = (1, 0, -\frac{x}{z}), X_y = (0, 1, -\frac{y}{z})$$

$$E = X_x \bullet X_x = \frac{x^2+z^2}{z^2}, F = X_x \bullet X_y = \frac{xy}{z^2}, G = X_y \bullet X_y = \frac{y^2+z^2}{z^2}$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dxdy = \frac{1}{z} dxdy$$

$\iint\limits_S z^2 dS = \iint\limits_R zdxdy$ ，let　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

Then　$\iint\limits_R zdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} drd\theta = \frac{\pi}{6}$

假設 $\overline{F} = (0,0,z), \bar{n} = (x,y,z)$ ，則 $\overline{F} \cdot n = z^2$ 且 $divF = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1$

由散度定理　$\iint\limits_S z^2 dS = \iint\limits_S \overline{F} \bullet \bar{n} dS = \iiint\limits_V dV = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$

§ 02　在黎曼流形上
W 是黎曼流形(M,g)上的向量場

$divW = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle \mathrm{A(X),X} \rangle dS$ ，其中 $A_W : X \to \nabla_X W$ ，∇ 是 Levi-Civita 聯絡。

用李導數(對體積元)的表示： $L_X \mu = (divX)\mu = d(\iota_X \mu)$ ，其中 μ 是體積元。

散度定理就寫成這樣： $\int_M divX\,\mu = \int_{\partial M} \iota_X \mu$ ，其中 $\omega = \iota_X \mu$ ， $d\omega = (div\mathrm{X})\mu$

註：

[大域微分幾何] p.335

$\int_\Omega (divW) dM = \int_{S=\partial M} < W, \nu > dS$ ，其中 ν 是 S 上朝外的單位法向量。

例：

M 是 R^3 中的單位球，取 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ ， $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$

則 $divX = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

左式 $\int_M (div)\mu = 3\int_M dx \wedge dy \wedge dz = 3 \times \frac{4\pi}{3} = 4\pi$

依定義內積運算為 $\iota_X (dx \wedge dy \wedge dz) = X^x dy \wedge dz + X^y dz \wedge dx + X^z dx \wedge dy$

右式 $\omega = \iota_X \mu = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$

單位球面上，法向量為 n(x,y,z)，故 $X \bullet n = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} dA = 4\pi$ 。

另一方面，在 R^3 中， $divX = \partial_i X^i = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}$

在(M,g)中， $divX = \partial_i X^i + \Gamma^i_{ik} X^k$ (寫成 $divX = \nabla_\mu X^\mu$)

又因為 $\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \sqrt{|g|}$ ， $divX = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i)$

在歐氏空間中直線方程式是 $\ddot{x}^k = 0$ ，在黎曼流形中測地線則多了一項變成

$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$ 。(這是根據最小耦合原理)

同理，散度在歐氏空間中為 $divX = \partial_i X^i$ ，在彎曲空間中的散度則多一項

$\Gamma^i_{ik} X^k$ 。

散度定理/黎曼幾何筆記

舉一例，在S^2上計算：

$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ ， $g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$ ， $|g| = r^4 \sin^2\theta$

考慮 $X = X^\theta \dfrac{\partial}{\partial\theta} + X^\phi \dfrac{\partial}{\partial\phi}$

$div(X) = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{|g|}X^\theta) + \dfrac{\partial}{\partial\phi}(\sqrt{|g|}X^\phi)]$ ， $\sqrt{|g|} = r^2\sin\theta$

代入計算，化簡得 $div(X) = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta X^\theta) + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial X^\phi}{\partial\phi}$

例如取 $X^\theta = \sin\theta, X^\phi = \cos\phi$ 則 $div(X) = 2\cos\theta - \dfrac{\sin\phi}{\sin\theta}$

在黃武雄老師[大域微分幾何] p.280

$divW = trA_w = \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} < A_w X, X > dS = \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} X < W, X > dS$

$= \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\int\limits_{S^{n-1}} < A(X), X > dS$

舉例說明之：

設 $W(x,y,z) = (x^2, y, z)$ ，則 Jacobian matrix $J_W = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, tr(\mathrm{J}_W) = 2x + 2$

Operator A： $A(X) = J_W \bullet X = 2xX^1 + X^2 + X^3$

$\langle A(X), X \rangle = 2xX_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

因為對稱性， S^2 ： $\int_{S^2} X_i^2 dS = \dfrac{4\pi}{3}$ for i=1,2,3

所以 $\int_{S^2} \langle A(X), X \rangle dS = \dfrac{4\pi}{3}(2x+2)$

$\dfrac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} \langle A(X), X \rangle dS = \dfrac{3}{4\pi} \bullet \dfrac{4\pi}{3}(2x+2) = 2x + 2 = tr(J_W)$

再舉例驗證 $tr(A) = \dfrac{3}{4\pi}\int_{S^2} \langle A(X), X \rangle dS$

取 F(x,y,z)=(yz,xz,xy)，X= (X_1, X_2, X_3) 是 S^2 上的單位向量， $A(X) = \nabla_X F = J_F \bullet X$

(1) Jacobian matrix of J： $J_F = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ ， $tr(A) = tr(J_F) = 0$

(2) $A(X) = \nabla_X F = J_F \bullet X = \begin{pmatrix} zX_1 + yX_3 \\ zX_1 + xX_3 \\ yX_1 + xX_2 \end{pmatrix}$

$\langle A(X), X \rangle = ... = 2zX_1X_2 + 2yX_1X_3 + 2xX_2X_3$

(3) S^2 上形如 X_1X_2 者皆為奇函數，因此 $\int_{S^2} X_1X_2 dS = ... = 0$

所以 $\int_{S^2} \langle A(X), X \rangle dS = 0$

§ 03 Green identity 的形式

u、v 是 R^n 的子集 Ω 中的光滑純量函數，Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 逐段光滑，則

$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \bullet \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS \cdots (1)$

其中，Δ 是 Lalpacian，∇ 是 gradient，$\frac{\partial v}{\partial n}$ 是 normal derivative $= \nabla v \bullet n$

註：[大域微分幾何] p.336 Green identity：$\int_\Omega (\Delta_M f) dM = \int_{S=\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} dS$

舉一例說明

$\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \le 1, u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, v(x,y,z) = x$ 則

左式中，$\nabla u = (2x, 2y, 2z), \nabla v = (1,0,0)$，左式= $\int_\Omega 2x d\Omega = 0$ (因為球的對稱性且 2x 是奇函數。)

右式，在邊界(球面)上 u=1，$\nabla v = (1,0,0), n = (x,y,z), \frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \bullet n = x$

同樣因為奇函數與球面的對稱性 $\int_{\partial\Omega} x dS = 0$

(1) 的證明：

在散度定理 $\int_\Omega (\nabla \bullet F) dV = \int_{\partial\Omega} F \bullet n dS$ 中取 $F = u\nabla v$

則 $\nabla \bullet F = \nabla u \bullet \nabla v + u\Delta v$ 以 n=3 為例

$\nabla v=(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z})$ ， $F=(u\frac{\partial v}{\partial x},u\frac{\partial v}{\partial y},u\frac{\partial v}{\partial z})$

$\nabla\cdot F=\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial v}{\partial z})=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\ldots$

$=(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})+u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})$

$=\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v$

Green identity 很容易從第一形式改成第二形式：

$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)d\Omega=\int_{\partial\Omega}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})dS$

同樣取Ω為單位球，取$u=x^2+y^2,v=z^2$ 則可以驗證

左式=$\int_\Omega -4z^2dV=-\frac{4\pi}{5}$，右式=$\int_{\partial\Omega}(2x^2z^2+2y^2z^2-2z^3)dS=-\frac{4\pi}{5}$。

另外，在偏微分方程中有一個類似的習作可供參考：

R^3中， $\Delta u=f,\frac{\partial u}{\partial n}=g$ 有解的充要條件為$\iiint_D fdxdydz=\iint_{\partial D}gdS$

§ 04 divergence 與體積漲縮率

細節請看[大域微分幾何]p.324：

φ_t是向量場 W 的 flow，則 divW 是流形 M 沿φ_t的體積漲縮率。

§ 05 關於 Killing 向量場與 Jacobi 場

X 是(M,g)上的 Killing 向量場的定義是$L_X g=0$。

用局部座標表示 $L_X g_{\mu\nu}=\nabla_\mu X^\nu+\nabla_\nu X^\mu=0$

Killing 向量場滿足$\nabla_\mu X^\nu+\nabla_\nu X^\mu=0$ ， $div(X)=\nabla_i X^i$

$\mu=\nu$ 代入 Killing equation，則$\nabla_\mu X^\mu=0$ 所以 div(X)=0

S^2 上的六個 Killing 向量場(旋轉、平移)可以看作是球面的對稱生成元。

例如$R=\frac{\partial}{\partial\varphi}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$生成對 z 軸的旋轉，是一種等距變換，向量場 R 對 g

守恆，也就是說$L_X g=0$，亦即 divX=0

由於這些對稱操作不會「壓縮」或「擴張」面積元素，因此對應的向量場是無散度的，這與散度在幾何上描述體積（或面積）變化率的性質一致。

Killing 向量場在對稱方面的意義與其在廣義相對論中的重要性就略過。

若在S^2上取一 Jacobi 場 J(t)，沿著測地線γ的 Jacobi 場 J(t)滿足

$\frac{D^2J}{dt^2}+R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma}=0$

散度定理/黎曼幾何筆記

$S^2: ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$，其中$\partial_\phi$是繞極軸的旋轉方向，對應球面的旋轉對稱性，是一 Killing 場，因此$div(\partial_\phi)=0$

∂_θ不是 Killing 場，$div(\partial_\theta)=\cot\theta$

計算過程：

1. $div(X)=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}X^i)$，其中$|g|=\sin^2\theta$

2. 向量場$X=\partial_\theta$，其對應分量$X^\theta=1, X^\phi=0$

3. 因此$div(\partial_\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\bullet\cos\theta=\cot\theta$

在赤道$(\theta=\frac{\pi}{2})$，$div(\partial_\theta)=0$，表示無局部擴張或收縮。

在北半球$(\theta<\frac{\pi}{2})$，$div(\partial_\theta)>0$，表示向量場向外發散。

在南半球$(\theta>\frac{\pi}{2})$，$div(\partial_\theta)<0$，表示向量場向內收斂。

Jacobi 場描述測地線族之間的距離如何變化，如果這些測地線朝向匯聚或發散，Jacobi 場的散度就可以視為測地線擴張或收縮的度量。

一般而言，Jacobi field 在S^2上具有非零散度，這反映了測地線在球面上匯聚或發散的本質。

§ 06 散度定理與面積的變分

[大域微分幾何]p.439~441]中有：

衍理 2

考慮M^n到X^{n+1}的浸射，變分向量場$V=\varphi N$，N 是M^n上的單位法向量(此時稱φ為變分函數)則

$A'(0)=-\int_M nH\varphi dM$。其中 H 是$M^n$在$X^n$中的均曲率。

定理 2

M^n為X^n中的最小曲面$\Leftrightarrow A'(0)=\frac{d}{dv}AreaM_v|_{v=0}=0$

以下是我的理解：

考慮一個封閉曲面$S=\partial\Omega$，其包圍的區域為Ω，體積為 V。

我們希望在保持體積 V 不變的條件下，找到使表面積A 最小的曲面形狀。

1. 引入 Lagrange multiplier

定義泛函 $J = A + \lambda(V - V_0)$，其中 λ 是 Lagrangian 乘子，V_0 是固定體積。

2. 表面積與體積的變分

(1) 表面積的(一階)變分：$\delta A = \iint_S H\phi dS$，其中 H 是均曲率，$\phi$ 是小函數，曲面受到法向擾動 $\delta r = \phi n$

(2) 體積變分：體積 $V = \iiint_\Omega dV$，由散度定理 $\delta V = \iint_S n \bullet \delta r dS = \iint_S \phi dS$

這裡利用散度定理將體積的變化轉換為曲面法向位移的積分。

3. 結合變分條件

$\delta J = \delta A + \lambda \delta V = 0$

把 $\delta A = \iint_S H\phi dS$ 與 $\delta V = \iint_S \phi dS$ 代入，得 $\iint_S (H\phi + \lambda\phi) dS = 0$

因為 ϕ 是任意函數，所以 $H = -\lambda$

4. 結論

在體積約束下，最小表面積的曲面滿足均曲率為常數。

(極小曲面滿足 H=0，關於體積約束的最小面積請看[大域微分幾何] p.456~常均曲率曲面。)

唯一滿足此條件的封閉曲面是球體（球面的均曲率 $H = \dfrac{2}{R}$ 且處處相同）。

我們看到了在將體積變分到面積變分的過程中，散度定理起了關鍵作用。
這件事在[大域微分幾何] p.439 有提到，我只是用自己能理解的方式重述一遍而已。
至於為什麼表面積 A 的(一階)變分與均曲率有關，那是因為均曲率是衡量曲面凹凸程度的量，要詳細說明那就是另一件事了。

§ 07 參考書目

1. Div、Grad、Curl and all tthat　H.M.Schey
2. 大域微分幾何　黃武雄 p.324~333
3. An introduction to Riemannian Geometry　Jose Natario
4. Spacetime and Geometry　Sean Carroll　Ch03