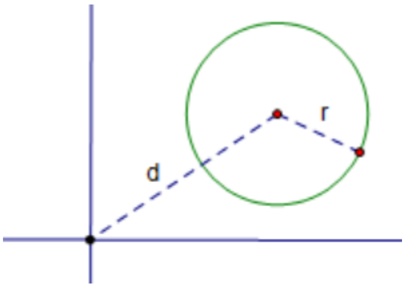
§ Putnam 2021/12/B3

Let h(x,y) be a real-valued function that is twice continuously differentiable througout R^2 ，and define $\rho(x,y)=y\frac{\partial h}{\partial x}-x\frac{\partial h}{\partial y}$ 。

Prove that for any positive constants d and r with d>r，there is a circle C with redius r whose center is a distance d away from the origin such that the integral of ρ over the interior of C is zero。



欲證 存在一個 C 使得 $\iint_{\text{interior}C}\rho(x,y)dA=0$

1.把 ρ 寫成一個向量場的散度

定義 $F=(yh(x,y),-xh(x,y))$ 則

$\nabla\cdot F=y\partial h_x-x\partial h_y=\rho$

2. 散度定理 for a disk with boundary C $\iint_D\rho dA=\iint_D\nabla\cdot F dA=\oint_C F\cdot n ds$

3. 參數化 C：假設 C 的圓心是 $(d\cos\alpha,d\sin\alpha)$ 則

   $x=d\cos\alpha+r\cos\theta, y=d\sin\alpha+r\sin\theta,\theta\in[0,2\pi)$

   $n=(\cos\theta,\sin\theta)\quad ds=rd\theta$

4. 在 C $F\cdot n$ 上計算

   Let $H(\theta)=h(d\cos\alpha+r\cos\theta,d\sin\alpha+r\sin\theta)$ 則 $F=(yH(\theta),-xH(\theta))$

   $F\cdot n=H(\theta)(y\cos\theta-x\sin\theta)=\ldots=d\sin(\alpha-\theta)$

5. 計算線積分

   $$\oint_C F\cdot nds=\int_0^{2\pi}dH(\theta)\sin(\alpha-\theta)rd\theta = dr\int_0^{2\pi}H(\theta)\sin(\alpha-\theta)d\theta$$

6. 找一個 α ，使得 $\int_0^{2\pi}H(\theta)\sin(\alpha-\theta)=0$

   因為 $\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta$

   假設 $A=\int_0^{2\pi}H(\theta)\cos\theta d\theta, B=\int_0^{2\pi}H(\theta)\sin\theta d\theta$

   則 $\int_0^{2\pi}H(\theta)\sin(\alpha-\theta)=0$ 變成 $A\sin\alpha-B\cos\alpha=0$

   若 A=B 則任何 α 都可以

   若 $A\neq0$ 取 α 使得 $\tan\alpha=\frac{B}{A}$

   若 A=0， $B\neq0$ 則取 $\cos\alpha=0(\alpha=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

7. 對 $d\geq r>0$ ，選圓 C 的圓心為 $(d\cos\alpha,d\sin\alpha)$ ，讓 α 為(6)中的值則

   $\iint_{\text{interior}C}\rho(x,y)dA=0$

得證。