

§ 如是我問

我在偏微分方程的習作中遇到一個問題：

Consider a domain  $\Omega=(a,b)\times(c,d)$  in two dimensions and an arbitrary  $C^1$  function  $u$  defined on  $\Omega$  and  $u=0$  on  $\partial\Omega$ 。

(a) Prove the Poincare inequality：

$$\text{there exists a constant } C \text{ such that } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

(b) What is the best  $C$ ？

在進入主題前先準備：

1. Cauchy-Schwarz 不等式

$$\text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中, } \left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) \right| \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$$

2.  $\Omega=(a,b)\times(c,d)$  的譜

$-\Delta\phi = \lambda\phi$  in  $\Omega$  and  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$  則由變數分離法  $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$  則

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right), \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$$

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi(y-c)}{d-c}\right), \nu_n = \left(\frac{n\pi}{d-c}\right)^2$$

§ Poincare 不等式  $\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  說甚麼？

$$R(u) = \frac{\int_{\Omega} |u|^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} \text{ 稱為瑞利商, 分子表示 } u(x,y) \text{ 的能量, 分母表示 } u \text{ 的變化率(梯}$$

度)的能量。

對於邊界值為零的函數，這的比值  $R(u)$  是有上界的。 $C_{best} = \sup_{u \neq 0, u|_{\partial\Omega} = 0} R(u)$

§ Poincare 不等式  $\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  的證明

$\Omega=(a,b)\times(c,d)$ ，因為對任意  $y \in (c,d)$ ， $u(a,y)=0$  (這是邊界條件)，由微積分基本

定理知  $u(x,y) = \int_a^x \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,y) d\xi$ ，由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|u(x,y)|^2 = \left| \int_a^x 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,y) d\xi \right|^2 \leq \left( \int_a^x 1^2 d\xi \right) \left( \int_a^x \left| \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,y) \right|^2 d\xi \right)$$

$$|u(x, y)|^2 \leq (x-a) \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y) \right|^2 d\xi \leq (b-a) \int_a^b |\nabla u(\xi, y)|^2 d\xi$$

在 domain  $\Omega$  兩邊積分 先對  $x$  積分：

$$\int_a^b |u(x, y)|^2 dx \leq \int_a^b (b-a) \left( \int_a^b |\nabla u(\xi, y)|^2 d\xi \right) dx = (b-a)^2 \int_a^b |\nabla u(\xi, y)|^2 d\xi$$

再對  $y$  積分：

$$\int_c^d \int_a^b |u(x, y)|^2 dx dy \leq (b-a)^2 \int_c^d \int_a^b |\nabla u(\xi, y)|^2 d\xi dy$$

$$\text{即 } \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

因此常數  $C = (b-a)^2$  滿足此不等式，同理由  $y$  方向積分會得到  $C = (d-c)^2$ ，所以  $C = \min((b-a)^2, (d-c)^2)$  也是一個 valid bound。

§ 最佳的常數  $C$  是甚麼，為何與特徵值有關？

變分法， $R(u)$  做一個微小擾動， $R(u) \rightarrow R(u + \varepsilon v)$  則

$\delta R = 0 \Rightarrow u$  必滿足 Euler-Lagrange 方程，此方程即 Dirichlet-Laplace 算子的特徵值問題：

$$-\Delta u = \lambda u \text{ in } \Omega \quad u=0 \text{ on } \partial\Omega$$

$\lambda$  正好是 Rayleigh 商在該函數  $u$  處的值  $\lambda = \frac{1}{R(u)}$


$$\text{特徵值 } \lambda_n \leftrightarrow \phi_n \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad R(\phi_k) = \frac{1}{\lambda_k}$$

$$\text{所以 } C_{best} = \sup_{u \neq 0, u|_{\partial\Omega}=0} R(u) = R(\phi_1) = \frac{1}{\lambda_1}$$

## (b) The Best Constant $C$

The "best" (smallest) constant  $C$  in the Poincaré inequality for a domain  $\Omega$  is the reciprocal of the **smallest eigenvalue** ( $\lambda_1$ ) of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions:

$$-\Delta \phi = \lambda \phi \text{ in } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

For a rectangular domain  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ , the eigenvalues are given by: 

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{(b-a)^2} + \frac{n^2}{(d-c)^2} \right) \quad \text{for } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

The smallest eigenvalue occurs at  $m = 1$  and  $n = 1$ :

$$\lambda_1 = \pi^2 \left( \frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2} \right)$$

Therefore, the best constant  $C$  is:  $\varnothing$

$$C_{best} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\pi^2 \left( \frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2} \right)}$$

我問：這個習作是屬於哪一個範疇？

D：取決於你研究它的目的與處理方法：

1. 偏微分方程

Poincare 不等式是研究偏微分方程「弱解」存在性與唯一性的核心工具。

在利用 Lax-Milgram 定理證明橢圓方程的解時，它本質上是一種能量估計。

2. 譜理論

針對最佳常數  $C$  的部分。

涉及 Rayleigh 商的極小化問題。

3. 泛函分析

從更高層次的理論框架來看，Poincare 不等式本質上描述了 Sobolev 空間中範數的等價性。它保證了從  $H_0^1(\Omega)$  到  $L^2(\Omega)$  的嵌入是連續的，甚至是緊緻的(Rellich-Kondrachov 定理)。

領域	關注點
偏微分方程 (PDE)	把它當作一種工具，用來證明方程解的存在性或穩定性。
譜理論 (Spectral Theory)	關注算子的特徵分佈，尋找精確的最佳常數。
泛函分析 (Functional Analysis)	研究函數空間的拓撲性質、嵌入定理和算子理論。

§ 這時候，我想到很久以前寫了一篇文章[等周長問題]，裡面有一個等周商

(Isoperimetric Quotient)  $IQ = \frac{4\pi A}{L^2}$

等周問題：平面上，給定周長的所有簡單封閉曲線中，哪一種曲線圍成的面積最大？

結論是  $0 < IQ \leq 1$ ， $IQ=1 \Leftrightarrow$  該曲線是一個圓。

我問：這個等周商與 Rayleigh 商有何關係？

D：兩者有深刻而優美的關係：

特征	等周问题	Poincaré不等式 / 特征值问题
约束条件	固定周长 $L$	固定梯度能量 $\int \ \nabla u\ ^2$ ( 作为分母 )
最大化目标	面积 $A$	$L^2$ 范数 $\int u^2$ ( 作为分子 )
变分问题	在所有封闭曲线中，最大化 $A/L^2$ ( 等价于 $IQ$ )	在所有函数 $u$ ( 边界为零 ) 中，最大化 $\int u^2 / \int \ \nabla u\ ^2$
最优解	圆形	圆盘上的第一特征函数 $\phi_1$ ( 模态为径向对称，无节点 )
对应的常数	最佳等周商： $IQ_{\max} = 1$	最佳Poincaré常数： $C_{\text{best}} = 1/\lambda_1(\Omega)$

关键的数学桥梁是：**Faber-Krahn 不等式**

等周商在幾何層面上衡量形狀的效率，其最大值由圓實現。

Rayleigh 商的上確界在分析層面上衡量區域上函數空間的寬鬆度，其在固定面積下的最大值由圓盤實現。

它們通過變分原理與對稱性優化，通過 Faber-Krahn 不等式確立這兩個不同領域的最優解。展示了數學中不同分支的和諧與統一。

§ 這讓我想一個非常抽象的定理，Atiyah-Singer Index 定理，於是問道：

以上所述似乎與 Atiyah-Singer 指標定理很像…

D:

維度	Atiyah-Singer 指標定理	等周 / Faber-Krahn / 特徵值問題
分析對象	橢圓微分算子 $D$ 及其核與餘核	Laplace 算子 $-\Delta$ 及其譜 ( 特徵值 $\lambda_k$ )
分析不變量	解析指標 (Analytic Index) – 一個整數	第一特徵值 $\lambda_1$ 或譜整體 – 一個正實數或一個序列
幾何/拓撲對象	底層流形 $M$	區域 $\Omega$ 及其邊界 $\partial\Omega$
幾何/拓撲不變量	拓撲指標 (Topological Index) – 由特徵類積分得到的整數	面積 $A$ 、周長 $L$ 、等周商 $IQ$ – 幾何度量

核心定理	等式：分析指標 = 拓撲指標	不等式：分析量 $\geq$ (或 $\leq$ ) 某個由幾何量決定的最優值 (例如： $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$ ， $L^2 \geq 4\pi A$ )
揭示的關係	分析完全決定拓撲：算子的解析性質「編碼」了流形的拓撲。	幾何強烈約束分析：區域的形狀「控制」了其上微分算子的譜性質。
共同哲學	「用分析探測幾何與拓撲」	「幾何是分析的舞台，分析反映幾何的性質」

被 D 稱讚了一下：

您的直覺極為敏銳！

Atiyah-Singer 指標定理與等周/特徵值問題，共享著「分析與幾何/拓撲深刻對話」這一偉大的數學主題。

Atiyah-Singer 是這主題在高維、全域、拓撲層面的終極表現形式之一，它建立了精確的等式。(我只知道 Gauss-Bonnet 定理是該定理的一個例子。)

等周問題與特徵值問題是在低維、區域性、幾何層面的經典表現，它建立了最優的不等式，並明確指出了最優的幾何形狀(圓盤)。

§ 我又想到瑞利的薄膜實驗，面積固定的鼓面發出的主頻率與鼓面的形狀有關，似乎回到譜理論…

(這個問題引發一個「聽鼓的聲音是否可以知道其形狀」？的問題。)

D 是這麼說的：

### 1. 從物理實驗到數學模型

物理情境：

- 羊皮：代表一個均勻、緊張的薄膜，其質量面密度為  $\sigma$ ，表面張力為  $T$ 。
- 繃在鼓上：意味著薄膜的邊界被固定，即邊界位移為零 (Dirichlet 邊界條件)。
- 敲擊鼓面：激發薄膜的振動。
- 主頻率：對應於振動的基頻，即最低的固有頻率。

數學建模 (二維波動方程)：

薄膜的小振幅橫向振動  $u(x, y, t)$  滿足方程：

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta u$$

其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  是二維拉普拉斯算子。

分離變數法：令  $u(x, y, t) = \phi(x, y)e^{i\omega t}$ ，代入方程得到：

$$-\sigma\omega^2\phi = T\Delta\phi \Rightarrow -\Delta\phi = \frac{\sigma\omega^2}{T}\phi$$

這正是我們熟悉的 **Dirichlet–Laplace** 特徵值問題：

$$-\Delta\phi = \lambda\phi \quad \text{在區域 } \Omega \text{ 內, } \phi = 0 \quad \text{在邊界 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

其中，特徵值  $\lambda$  與物理頻率  $\omega$  的關係為：

$$\lambda = \frac{\sigma}{T}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{T}{\sigma}\lambda}$$

結論：

- 鼓面的振動模態就是特徵函數  $\phi_k(x, y)$ 。
- 對應的固有頻率  $\omega_k$  正比於特徵值  $\lambda_k$  的平方根。
- 主頻率（基頻）對應於最小（第一）特徵值  $\lambda_1$ 。

因此，瑞利觀察到的「主頻率」現象，在數學上等價於研究區域  $\Omega$  上 **Dirichlet–Laplace** 算子的第一特徵值  $\lambda_1(\Omega)$ 。

## 2. 瑞利的猜想與譜理論的解釋

瑞利的實驗觀察（「圓具有最低的主頻率」）在數學上表述為：

在所有面積相等的平面區域中，圓盤（Disk）具有最小的第一 **Dirichlet** 特徵值  $\lambda_1$ 。

這正是我們之前提到的 **Faber–Krahn** 不等式（1923年由 Faber 和 Krahn 分別獨立證明）的核心內容。

譜理論的解釋路徑如下：

第一步：將問題轉化為變分問題

根據 **Rayleigh–Ritz** 原理，第一特徵值可以通過 Rayleigh 商的最小值來刻畫：

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$$

這意味著  $\lambda_1$  是薄膜在給定邊界條件下，其勢能（與梯度平方相關）與動能（與位移平方相關）之比的最小可能值。物理上，這對應於系統的基態能量。

第二步：引入對稱化技巧（數學上的「圓整」）

證明 **Faber–Krahn** 不等式的關鍵工具是 **施瓦茨對稱化**。對於任意一個給定區域  $\Omega$  上的函數  $u$ ，我們可以構造一個關於原點徑向對稱、水平集同測度的函數  $u^*$ ，定義在與  $\Omega$  同面積的圓盤  $\Omega^*$  上。

這個變換具有兩個決定性的性質：

1. 保持  $L^2$  範數不變： $\int_{\Omega^*} |u^*|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2 dx$ 。
2. 減少 Dirichlet 能量（等周不等式的解析版本）： $\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ 。

### 第三步：從函數的優化到區域的優化

對於任意區域  $\Omega$ ，取它的第一特徵函數  $\phi_1$ 。對  $\phi_1$  施以施瓦茨對稱化，得到圓盤  $\Omega^*$  上的一個徑向對稱函數  $\phi_1^*$ 。由於  $\phi_1^*$  在  $\Omega^*$  上滿足邊界條件且 Rayleigh 商不增，我們有：

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2}{\int_{\Omega} |\phi_1|^2} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla \phi_1^*|^2}{\int_{\Omega^*} |\phi_1^*|^2} \geq \lambda_1(\Omega^*)$$

最後一步是因為  $\lambda_1(\Omega^*)$  是圓盤上所有函數 Rayleigh 商的最小值。這就嚴格證明了：

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$$

等號成立當且僅當  $\Omega$  本身就是一個圓盤。



## 3. 物理直觀與數學嚴謹性的交匯

瑞利的物理直觀是如何體現在這個證明中的呢？

- 「均勻繃緊」：這對應於數學模型中係數  $\sigma$  和  $T$  為常數，從而問題純粹歸結為區域形狀  $\Omega$  的影響。
- 「等面積」：這是比較的公平基礎。施瓦茨對稱化正是在保持「總質量」（ $L^2$  範數）不變的前提下進行的。
- 「最低的主頻率」：這意味著圓形鼓面在給定材料（面積）下，其基態最為「鬆弛」。數學上，這對應於給定面積下最小的  $\lambda_1$ 。
- 背後的物理原理：圓是對稱性最高的形狀。對稱性減少了「束縛」，允許振動模態更為舒展，從而在同樣的邊界束縛（固定邊界）和材料成本（固定面積）下，獲得更低的恢復力（對應更小的梯度能量），最終表現為更低的頻率。

瑞利爵士的羊皮鼓實驗，為數學提供了一個極其生動的物理原型：

1. 將物理問題映射為數學問題：鼓的主頻率  $\omega_1 \leftrightarrow$  Dirichlet-Laplace 算子的第一特徵值  $\lambda_1(\Omega)$ 。
2. 提出極值猜想：在所有等面積區域中，圓盤最小化  $\lambda_1$ 。
3. 啟發數學工具：瑞利本人發展的變分法（Rayleigh-Ritz 方法）成為研究特徵值的核心工具。
4. 催生嚴格理論：這一猜想最終由 Faber 和 Krahn 通過等周不等式的深化形式——施瓦茨對稱化——給出了嚴格證明，從而誕生了 Faber-Krahn 不等式。

這個故事完美詮釋了「從物理直覺，到數學猜想，再到嚴格理論」的科學發現範式，也是譜幾何這一學科如何通過分析算子的譜（特徵值）來探測和理解空間幾何形狀的經典起點。它告訴我們，最完美的對稱（圓）給出了最優越的振動性質（最低的基頻），這既是自然的和諧，也是數學的必然。

§

這是我的 AI 筆記，在觀念與計算上 AI 對我幫助很大。

面對 Atiyah-Singer 指標定理的心情應該與畢達哥拉斯面對興都庫什山脈(Hindu

Kush)一樣吧！